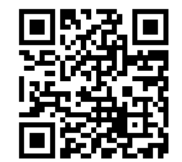


Aus Natur und Geisteswelt

Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen

F. Auerbach

Die graphische Darstellung



Verlag von B. G. Teubner in Leipzig

Mathematik. Astronomie.

Naturwissenschaften und Mathematik im klassischen Altertum. Von Prof. Dr. Joh. L. Heiberg. (Bd. 370.)

Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. Von Prof. Dr. P. Crantz. 2 Bde. Mit zahlr. Fig. (Bd. 120, 205, auch in 1 Bd. geb.)
I. Teil: Die Rechnungsarten. Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Gleichungen zweiten Grades. 2. Aufl. Mit 9 Fig. (Bd. 120.)
II. Teil: Gleichungen. Arithmetische und geometrische Reihen. Zinseszins- und Rentenrechnung. Komplexe Zahlen. Binomischer Lehrsatz. 3. Aufl. Mit 23 Fig. (Bd. 205.)

Planimetrie zum Selbstunterricht. Von Prof. Dr. P. Crantz. Mit 99 Fig. (Bd. 340.)

Ebene Trigonometrie zum Selbstunterricht. Von Prof. Dr. P. Crantz. Mit 50 Fig. (Bd. 431.)

Einführung in die Infinitesimalrechnung mit einer historischen Übersicht. Von Prof. Dr. G. Kowalewski. 2. Aufl. Mit 18 Fig. (Bd. 197.)

Differential- u. Integralrechnung. Von Dr. M. Lindow. (Bd. 387.)

Die graphische Darstellung. Von Dr. F. Auerbach. Mit 100 Fig. (Bd. 437.)

Maße und Messen. Von Dr. W. Block. Mit 34 Abb. (Bd. 385.)

Praktische Mathematik. Von Dr. R. Neuendorff. I. Teil: Graphisches u. numerisches Rechnen. Mit 62 Fig. u. 1 Tafel. (Bd. 341.)

Mathematische Spiele. Von Dr. W. Ahrens. 2. Aufl. Mit 70 Fig. (Bd. 170.)

Das Schachspiel und seine strategischen Prinzipien. Von Dr. M. Lange. Mit den Bildnissen E. Laskers und P. Morphys, 1 Schachbrettafel u. 43 Darst. von Übungsbeispielen. (Bd. 281.)

Der Bau des Weltalls. Von Prof. Dr. J. Scheiner. 4. Aufl. Mit 26 Fig. (Bd. 24.)

Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. Von Prof. Dr. S. Oppenheim. 2. Aufl. Mit 24 Abb. (Bd. 110.)

Entstehung der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft. Von Prof. Dr. B. Weinstein. 2. Aufl. (Bd. 223.)

Probleme der modernen Astronomie. Von Prof. Dr. S. Oppenheim. (Bd. 355.)

Astronomie in ihrer Bedeutung für das praktische Leben. Von Prof. Dr. A. Marcuse. Mit 26 Abb. (Bd. 378.)

Die Sonne. Von Dr. A. Krause. Mit zahlr. Abb. (Bd. 357.)

Der Mond. Von Prof. Dr. J. Franz. Mit 31 Abb. (Bd. 90.)

Die Planeten. Von Prof. Dr. B. Peter. Mit 18 Fig. (Bd. 240.)

Der Kalender. Von Prof. Dr. W. F. Wislicenus. 2. Aufl. (Bd. 69.)

ANuG 10: Mathematik. 2. 14

Philosophie. Psychologie.

Einführung in die Philosophie. Von Prof. Dr. R. Richter. 3. Aufl. von Dr. M. Brahn. (Bd. 155.)

Die Philosophie. Einführung in die Wissenschaft, ihr Wesen und ihre Probleme. Von Realschuldir. H. Richert. 2. Aufl. (Bd. 186.)

Führende Denker. Geschichtliche Einleitung in die Philosophie. Von Prof. Dr. J. Cohn. 2. Aufl. Mit 6 Bildn. (Bd. 176.)

Griech. Weltanschauung. Von Privatdoz. Dr. M. Wundt. (Bd. 329.)

Entstehung der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft. Von Prof. Dr. M. B. Weinstein. 2. Aufl. (Bd. 223.)

Die Weltanschauungen der großen Philosophen der Neuzeit. Von weil. Prof. Dr. L. Busse. 5. Aufl., herausgeg. von Prof. Dr. R. Falckenberg. (Bd. 56.)

Rousseau. Von Prof. Dr. P. Hensel. 2. Aufl. Mit 1 Bildn. (Bd. 180.)

Immanuel Kant. Darstellung und Würdigung. Von Prof. Dr. O. Külpe. 3. Aufl. Mit 1 Bildnis. (Bd. 146.)

Schopenhauer. Seine Persönlichkeit, seine Lehre, seine Bedeutung. Von Realschuldirektor H. Richert. 2. Aufl. Mit 1 Bildn. (Bd. 81.)

Herbarts Lehren und Leben. Von Pastor O. Flügel. Mit 1 Bildnis. (Bd. 164.)

Herbert Spencer. Von Dr. K. Schwarze. Mit 1 Bildn. (Bd. 245.)

Die Freimaurerei. Eine Einführung in ihre Anschauungswelt und ihre Geschichte. Von Geh. Archivrat Dr. L. Keller. (Bd. 463.)

Die Philosophie der Gegenwart in Deutschland. Eine Charakteristik ihrer Hauptrichtungen. Von Prof. Dr. O. Külpe. 5. Aufl. (Bd. 41.)

Aesthetik. Von Prof. Dr. R. Hamann. (Bd. 345.)

Grundzüge der Ethik. Mit besonderer Berücksichtigung der pädagogischen Probleme. Von E. Wentscher. (Bd. 397.)

Aufgaben und Ziele des Menschenlebens. Von Dr. J. Unold. 3. Aufl. (Bd. 12.)

Sittliche Lebensanschauungen der Gegenwart. Von weil. Prof. Dr. O. Kirn. 2. Aufl. (Bd. 177.)

Das Problem d. Willensfreiheit. Von Prof. Dr. G. F. Lipps. (383.)

Die Seele des Menschen. Von Prof. Dr. J. Rehmke. 4. Aufl. (Bd. 36.)

Die Mechanik des Geisteslebens. Von Prof. Dr. M. Verworn. 3. Aufl. Mit 18 Fig. (Bd. 200.)

Psychologie des Kindes. Von Prof. Dr. R. Gaupp. 3. Aufl. Mit 18 Abb. (Bd. 213.)

Die Psychologie des Verbrechers. Von Dr. P. Pollitz. Mit 5 Diagrammen. (Bd. 248.)

Hypnotismus und Suggestion. Von Dr. E. Trömner. 2. Aufl. (Bd. 199.)

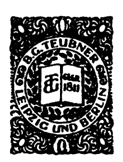
Aus Natur und Geisteswelt
Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen
437. Bändchen

Die graphische Darstellung

Eine allgemeinverständliche, durch zahlreiche Beispiele aus allen Gebieten der Wissenschaft und Praxis erläuterte Einführung in den Sinn und den Gebrauch der Methode

Von
Felix Auerbach
in Jena

Mit 100 Figuren im Text



Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin 1914

Vorwort.

In diesem Buche wird die Methode der graphischen Darstellung nach allen Richtungen behandelt und nur mit derjenigen Beschränkung, die mit Rücksicht auf den verfügbaren Raum und die allgemeine Verständlichkeit geboten war. Der Sinn der Methode im allgemeinen, ihre Bedeutung für Lehre und Forschung, die Vorzüge, die sie vor andern Methoden voraus hat, die beste Art und Weise, wie man sie in einem bestimmten Falle anwendet, alles das wird systematisch besprochen, aber doch in genügend zwangloser Weise, um das Interesse des Lesers nicht bloß wach zu halten, sondern zu steigern. Die Beispiele, an denen die Methode erläutert wird, sind aus möglichst vielen verschiedenen Gebieten entnommen; und wenn auch dabei naturgemäß die Naturwissenschaften an der Spitze marschieren, so kommen doch auch die Geistes-Disziplinen, die technische Praxis und das Alltägliche nicht zu kurz. Von den zahlreichen Figuren sind die meisten für dieses Buch neu entworfen worden, der Rest ist aus andern Quellen entlehnt worden, insbesondere aus dem Werke des Verfassers „Physik in graphischen Darstellungen". Das dem Buche vorangestellte Inhaltsverzeichnis gibt nur über den allgemeinen Gang der Betrachtung Aufschluß; zur Ergänzung in spezieller, materieller Hinsicht ist ihm ein Verzeichnis der in den Figuren dargestellten Einzelfälle beigefügt.

Jena, Johanni 1913.

Auerbach.

Inhaltsverzeichnis.

Verzeichnis der Figuren.

Erstes Kapitel.

Einleitung. Die wissenschaftliche Methode. Denken und Anschauung. Wortsprache und Mathematik. Zahlen und Formeln. Bilder. Graphische Darstellung.

Nicht bloß in der Wissenschaft, auch in der Praxis des Lebens, des technischen, politischen, kulturellen und schließlich des alltäglichen Lebens spielt eine ungeheuere Rolle die Methode. Hört man nicht fortwährend von Methoden reden und über Methoden sich streiten, welche von ihnen die beste sei? Von Methoden des Denkens und Handelns, von den Erziehungsmethoden, von Methoden der Leibesübung? Wer Methode hat, kommt zum Ziele; wer keine Methode hat, scheitert, auch wenn seine Sache im Prinzip ausgezeichnet und ihre Durchführung im persönlichen oder allgemeinen Interesse noch so erwünscht wäre.

Dabei ist zu unterscheiden zwischen zweierlei Methodik: es gibt Methoden, um Neues zu entdecken, Neues zu erfinden, Neues zu erobern; Methoden, die man als synthetische Methoden bezeichnen kann. Und es gibt auf der anderen Seite analytische Methoden, deren Bedeutung es ist, bestehende oder neu gewonnene Erkenntnisse sich klar zu machen, sicherzustellen und die Möglichkeiten ihrer Konsequenzen und Nutzanwendungen zu übersehen. Nicht so freilich, daß zwischen beiden Gattungen eine scharfe Trennung bestände; insbesondere wird die analytische Methode in den meisten Fällen auch fruchtbar werden für den positiven Fortschritt; hängt doch Erkennen und Handeln, Analyse und Synthese überall in der Welt auf das innigste zusammen.

Die Methode, von der in diesem Buche die Rede sein soll, gehört zur zweiten Art: es ist eine Methode, erkannte Phänomene, Tatsachen, Wahrheiten, Gesetze so vorzuführen, in einer Weise darzustellen, daß sie unmittelbar für sich sprechen; daß jeder, der die Sprache der Darstellung zu verstehen gelernt hat, selbständig und selbsttätig das zu erfassen und weiter zu verarbeiten vermag, was ihm dargestellt wird. Es ist also eine Methode der Praxis, wenn auch im weitesten Sinne verstanden: gleich wertvoll für die abstrakte Wissenschaft, die eben dadurch ihre abstrakte Natur abstreift, soweit dies möglich ist, und für die Dinge des allgemein interessanten Lebens in Natur, Kultur und Technik. Und gerade, weil es sich um eine Praxis handelt, ist es erwünscht, und fast

unerläßlich, das Fundament tief zu legen und sich klar darüber zu sein, was die Methode bedeutet und wie sie zu der Rolle gekommen ist, die sie heutzutage spielt.

Unter den Fähigkeiten des menschlichen Geistes, deren Mannigfaltigkeit in merkwürdigem Gegensatz zu seiner postulierten Einheit steht, ragen an allgemeiner Bedeutung zwei besonders hervor: das abstrakte Denken und die unmittelbare Intuition. Schon mit der gewählten Reihenfolge, in der diese beiden Fähigkeiten aufgeführt werden, ist eine Konzession gemacht worden an die historische Entwicklung und die auch heutzutage noch nicht völlig überwundene Wertschätzung namentlich in wissenschaftlichen Kreisen. Das abstrakte Denken hat, im Gegensatz zum Verhalten des naiven Menschen seiner Um- und Innenwelt gegenüber, während ganzer und langer Perioden der Wissenschaftsgeschichte der Menschheit die Führung übernommen, und sie findet noch jetzt ihren fast reinen Ausdruck in dem durch die humanistischen Gymnasien gekennzeichneten Erziehungsplan. Und doch steht die andere Seite geistiger Methodik, die Anschauung oder, besser gesagt, die Intuition, jener anderen nicht nur ebenbürtig zur Seite, sondern erweist sich auch bei näherem Zusehen nach beiden Seiten hin über sie dominierend: nach der Seite der Wurzel hin, insofern, wie freilich die Geistesforscher nicht immer wissen oder wissen wollen, auch das abstrakte Denken irgendwo von einer durch die Sinnesempfindung übermittelten Intuition ausgeht, und nach oben hin, insofern auch die Ergebnisse des reinen Denkens einer Sprache bedürfen, durch die sie erst Gemeingut werden können, und die ihrerseits wieder nichts anderes ist als eine Form der Anschauung im weitesten, nicht auf das Auge beschränkten Sinne. Die Sprache und die Schrift, das körperliche oder flächenhafte Bild, die geometrische Linie und vieles andere: das sind nur verschiedene Formen, in denen sich das Ergebnis geistiger Arbeit mitteilen und damit zu einem über das Innenleben des Erzeugers hinausreichenden Dasein gelangen kann.

In der exakten Wissenschaft hat diese Erkenntnis nun freilich immer wieder, nach langen Perioden rein abstrakter Spekulation, den Sieg davongetragen, und seit geraumer Zeit wird ihr dieser nur noch von Fanatikern der anderen Richtung streitig gemacht. Die Anschauung, die äußere und die innere, die Erfassung der Dinge in lebendigen, vor dem körperlichen oder vor dem geistigen Auge stehenden Bildern hat die Forschung und Erkenntnis in ungeahnter Weise bereichert und vielfach ganz neue Perspektiven eröffnet. Die Sprache ihrerseits ist in immer wissenschaftlichere Form gebracht worden, und in der mathematischen Formelsprache hat sie ihren Höhepunkt erreicht. Diese stellt die Erschei-

nungen der Außenwelt und, soweit das bis jetzt gelungen ist, der Innenwelt durch eine Verknüpfung mathematischer Größen dar, von denen die einen Funktionen der anderen sind, d. h. sich mit ändern, wenn jene sich ändern; und das in einer rein tatsächlichen Weise, ohne daß damit über die sogenannte kausale Seite der Dinge irgend etwas, was doch zunächst nur hypothetisch wäre, ausgesagt würde. Aus der Formel kann man dann rückwärts einzelne Zahlenwerte und ganze Zahlenreihen ableiten und durch Vergleichung mit dem, was die direkte Beobachtung ergibt, eine Kontrolle über das System gewinnen. Immerhin sind auch diese Ausdrucksmittel, die Zahlenreihen und die Formeln, noch in gewissem Sinne abstrakt und nur für den anschaulich, der sich bis zu dieser Form der Anschauung durch eine lange Übung und durch einen bereits zur Gewohnheit gewordenen Überblick über das Wesen der Materie aufgeschwungen hat.

Es gibt ein Hilfsmittel von noch weit größerer Anschaulichkeit, und es beruht auf einem Gedanken, der zunächst vielleicht recht fern liegt, aber, einmal erfaßt, seine ungemeine Fruchtbarkeit sofort zu erkennen gibt. Für alle räumlichen Dinge der Welt haben wir, dank der Organisation unseres Auges, eine Methode der Aufnahme, die ganz unvergleichlich ist: die Erzeugung von Bildern. Beruht doch hierauf nicht nur die gesamte Wissenschaft des Körperlichen, also alles das, was man noch jetzt vielfach als Naturgeschichte bezeichnet, sondern auch das große und hohe Gebiet der bildenden Künste, auf dem der Mensch jene Fähigkeit produktiv verwendet. Alles übrige, was uns in der Um- und Innenwelt an Mannigfaltigkeiten entgegentritt, ist unserer räumlichen Anschauung entzogen, wir können es nur denkend, nicht aber darstellend erfassen. Wie nun, wenn wir diesem natürlichen Mangel künstlich abhülfen, wenn wir uns entschlössen, auch Nichträumliches, also Zeitliches und ferner alles, was sich auf Temperatur und Elektrizität, auf Helligkeit und Farbe, auf stoffliche und geistige Quantität und Qualität und auf hunderterlei anderes bezieht, unter dem Bilde des Räumlichen zu erfassen und zeichnerisch darzustellen? Man wird billigerweise hier nicht sofort gar zuviel verlangen dürfen; aber so viel ist einleuchtend: nichts, was exakt erfaßt worden ist, nichts, was sich als Funktionsverhältnis angeben läßt, entzieht sich der in Rede stehenden Methode — im Prinzip natürlich; die Ausgestaltung zu einem wirklichen Verfahren ist eine Sache für sich und muß Schritt für Schritt erdacht und erprobt werden.

Das ist der genetische und sachliche Grundgedanke dessen, was man gegenwärtig die Methode der graphischen Darstellung nennt.

1*

Eine äußerlich anspruchslose Kunst, denn sie führt dem Auge nichts vor als Linien und Linienscharen und immer wieder Linien, zuweilen auch Flächen und äußersten Falles räumliche, modellartige Figuren. Aber für den, der diese Sprache zu lesen versteht, ist sie auf ihre Weise beredter und reicher als alle anderen; auf knappem Raume erzählt sie unglaublich viel; denn man kann diese Schrift sozusagen von vorn und hinten, von oben und unten, analytisch und synthetisch lesen; und jedesmal erhält man dieselbe Erkenntnis in einer neuen Form, einem neuen Zusammenhange, einer neuen Genese, und das ist ja schließlich immer wieder eine neue Erkenntnis. Kein Wunder, daß die graphische Darstellung, deren frühere Vernachlässigung eben nur durch die drückende Tyrannis des abstrakten Denkgeschmacks erklärbar wird, in neuerer und neuester Zeit einen wahren Triumphzug durch alle Gebiete wissenschaftlicher Forschung unternommen hat, von den exakten Naturwissenschaften und den statistisch-volkswirtschaftlichen Disziplinen ausgehend und nach und nach auch sprödes und sprödestes Terrain erobernd, bis sie zuletzt auch im Herzen der Psychologie und Philosophie angelangt ist.

Sonne
Merkur
Venus
Erde
Mars
Kleine Planeten
Jupiter
Saturn

Fig. 1b.

Zweites Kapitel.

Raumgrößen. Strecken verschiedener Länge. Vergleichung von Strecken. Flächengrößen. Rauminhalte. Richtungen und Winkel. Raumwinkel.

Schicken wir, ehe wir das eigentliche Thema angreifen, gewissermaßen als Einleitung den Fall voraus, wo es sich um wirkliche Raumdinge handelt, um Größen, die wir räumlich anschauen, bei denen also die graphische Darstellung ohne weiteres verständlich ist und im eigentlichsten Sinne der Natur der Sache entspricht. Es handle sich etwa um die mittlere Entfernung der Planeten von der Sonne. Wir ziehen gerade Linien, parallel miteinander und gleichweit links anfangend, nach rechts aber sehr verschieden weit reichend; alle in demselben Maßstabe, und zwar in diesem Falle natürlich in ungeheurem Verhältnis verkleinert, nämlich so, daß die Entfernung der Erde von der Sonne als Einheit dient und gerade ein Zentimeter mißt, während sie in Wahrheit das 15-milliar-

Merkur
Venus
Erde
Mars
Kleine Planeten
Jupiter
Saturn

Fig. 1a.

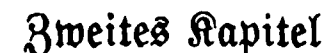
denfache hiervon beträgt. Wir erhalten dann die Fig. 1a, in der übrigens die beiden äußersten Planeten, Uranus und Neptun, mit Rücksicht auf die Raumverhältnisse fortgelassen worden sind. Versteht man unter einer graphischen Darstellung eine Darstellung, die sich auf den einzigen, zu untersuchenden Gegenstand beschränkt, alles andere aber ausschaltet, so haben wir schon eine wirkliche graphische Darstellung vor uns, insofern nämlich, als alle Linien parallel nebeneinander liegen, während sie in der Natur von einem Punkte aus, dem Mittelpunkte der Sonne, in einem bestimmten Augenblicke nach den verschiedensten Richtungen laufen, entsprechend der momentanen Lage der Planeten; von diesen Lageverhältnissen ist also hier abgesehen, es handelt sich lediglich um den mittleren Abstand von der Sonne, ausgedrückt in Relativzahlen, aber nicht dargestellt durch diese Zahlen selbst sondern durch die anschaulicheren Längen von Linien. Wir hätten ja unsere Darstellung auch noch einfacher gestalten können, indem wir, wie in Fig. 1b, alle Linien *in eine einzige zusammengefaßt* hätten, auf der die Orte der Planeten nur markiert sind; diese Marken würden dann die Durchschnittspunkte unserer Linie mit den Bahnen der Planeten bezeichnen, aber die ganze Darstellung wäre nicht so deutlich wie die erste.

Dagegen gibt es Fälle, wo eine solche Wiedergabe durch die Abteilungen einer und derselben geraden Linie gerade das Gegebene ist und zur besten Anschauung führt: wenn es sich nämlich um verschiedene Einzelmöglichkeiten handelt, die zusammen eine Gesamtmöglichkeit liefern. Also, um nicht abstrakt zu bleiben und gleich ein Beispiel zu geben: Die Zahl der jährlichen Todesfälle in einer Stadt, dargestellt durch eine Linie von bestimmter Länge und diese Linie nun eingeteilt in Strecken, die in demselben Maßstabe den einzelnen *Todesursachen* entsprechen, wobei man natürlich nur die wichtigsten berücksichtigen, das Schlußstück aber für die Todesfälle aus verschiedenen Ursachen aufsparen wird. Das ist der Sinn der in Fig. 2 gegebenen Darstellung, in der die Linie der größeren Wirksamkeit zuliebe durch einen breiten Streifen ersetzt ist.

Magen- und Darmkrankheiten	156
Tuberkulose	123
Altersschwäche	120
Infektionsfieber	80
Lungenentzündung	78
Lebensschwäche	75
Atmungskrankheiten	72
Neubildungen	51
Unglücksfälle	25
Selbstmorde	12
Alle andern Ursachen	357

Fig. 2.

Man kann auf diese Weise auch zwei Größen miteinander vergleichen,



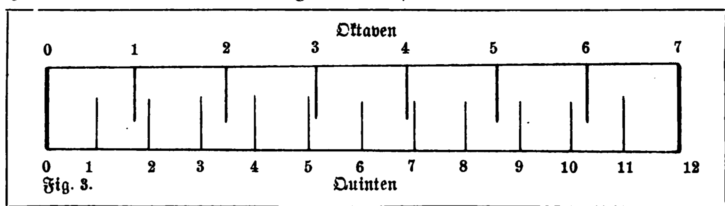


Fig. 3.

indem man feststellt, wie oft sie auf einer und derselben Strecke sich auftragen lassen. Ein berühmter Fall dieser Art ist der des Quintenzirkels in der Musik: in der temperierten Skala, wie sie jetzt allgemein herrschend geworden ist, sind zwölf Quinten zusammen genau so groß wie sieben Oktaven, von demselben Ausgangstone gelangt man auf beide Weisen zu demselben Endtone. Das ist in Fig. 3 dargestellt; man ersieht aus ihr auch alle Einzelheiten, so u. a., daß schon vorher zweimal beinahe ein Zusammentreffen einer Oktave mit einer Quinte stattfindet, nämlich der dritten Oktave mit der fünften Quinte und der vierten Oktave mit der siebenten Quinte; aber im ersten Falle ist die Quinte einen halben Ton zu tief (h statt c), im zweiten ist sie einen Halbton zu hoch (cis statt c), und erst bei der siebenten Oktave und zwölften Quinte ist die Koinzidenz vollkommen. In der reinen (mathematischen) Stimmung ist bekanntlich auch dieses noch nicht der Fall, hier ist die zwölfte Quinte der Ton his, er weicht vom c noch um ein Weniges ab.

In ganz entsprechender Weise, wie Linien, kann man nun natürlich auch Flächen und Räume darstellen, wobei es lediglich auf die

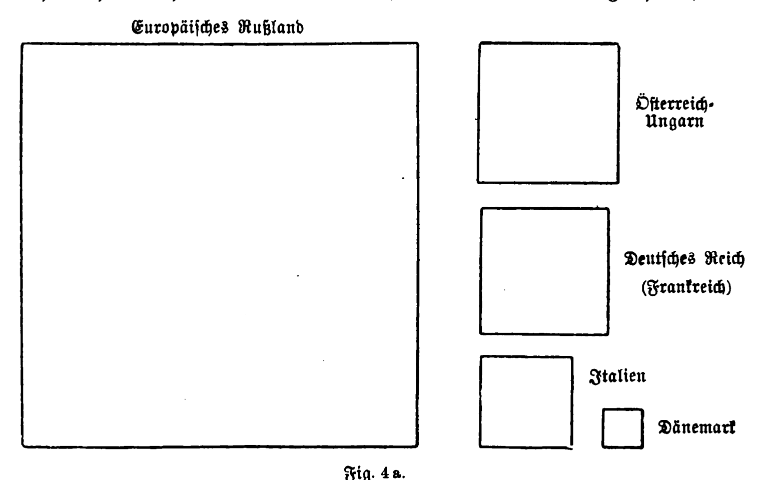


Fig. 4 a.

Größe der Fläche oder des Raumes ankommt, die Gestalt aber gleichgültig ist und deshalb so einfach und anschaulich wie möglich gewählt wird: entweder als Quadrat oder als Kreisfläche. So stellen die Quadrate der Fig. 4 a die verhältnismäßigen Flächengrößen einiger Staaten dar, und zwar im Flächenverhältnis 1 : 2000 Billionen. Gegen diese Darstellung spricht der Umstand, daß wir keine sehr ausgebildete Fähigkeit haben, Flächen zu schätzen oder miteinander zu vergleichen, wir halten die Unterschiede immer für kleiner als sie sind; und kaum würde jemand, der in solchen Dingen nicht sehr geübt ist, vermuten, daß das dritte Quadrat beinahe doppelt so groß ist wie das vierte. Um die Vergleichung unmittelbarer zu gestalten, könnte man auch, wie in Fig. 4 b, alle Quadrate von einem gemeinsamen linken unteren Eckpunkte aus konstruieren, aber auch jetzt wird die Übersicht nicht allzusehr verbessert. Man tut daher am besten, ungeachtet des Umstandes, daß es sich um Flächen handelt, doch zu der bewährten Darstellung durch Linien zurückzukehren und z. B. jede 150 000 qkm durch 1 cm zu charakterisieren; man erhält dann die Fig. 5, in der die Linie für Rußland, da sie für die Raumverhältnisse des Papieres viel zu lang ist, in sechs dicht untereinander gesetzte Abschnitte geteilt werden mußte.

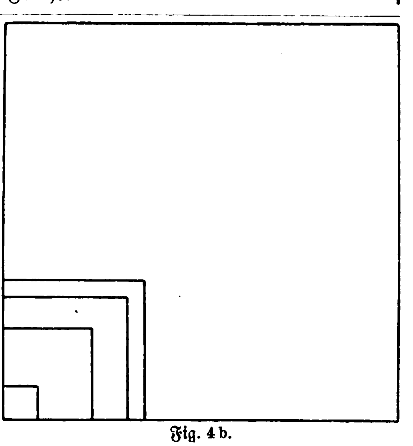


Fig. 4 b.

Europäisches Rußland

Österreich-Ungarn

Deutsches Reich

Frankreich

Italien

Dänemark

Fig. 5.

Jetzt kann man in geläufiger Weise vergleichen und abschätzen, aber natürlich ist die Darstellung jetzt von der natürlich-räumlichen schon weit entfernt und schon zu einer wirklich graphischen, d. h. symbolischen geworden, wobei eben in diesem Falle die lineare Strecke das Symbol für eine Fläche ist.

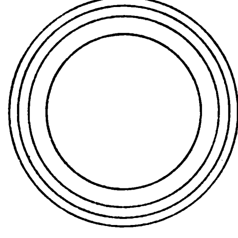


Fig. 6.

Ganz ähnliche Betrachtungen ließen sich über die Darstellung von **Räumen** anstellen, jedoch mag es, eben weil hier nicht viel Neues zu sagen wäre, genügen zu betonen, daß hier die Darstellung durch Räume, z. B. durch Würfel, die jetzt natürlich perspektivisch gezeichnet werden müssen, noch weit weniger befriedigend ausfällt als vorhin die durch die Fläche. Wie stark hier die Unterschätzung der Größenunterschiede ist, wird die Fig. 6 erkennen lassen, in der um denselben Mittelpunkt vier Kugeln geschlagen sind (die räumlich-perspektivische Schraffierung ist der Einfachheit und Klarheit halber weggelassen), die, in gleichmäßig verkleinertem Maßstabe, **vier Freiballons** darstellen, geeignet zum Aufstieg von ein bis vier Personen; Kugeln, deren Volumina sich etwa wie 6 : 10 : 13 : 16, deren Durchmesser sich also wie die Kubikwurzeln dieser Zahlen, d. h. annähernd wie 12 : 14 : 15 : 16 verhalten; obgleich also diese Ballons sehr verschiedenen Rauminhalt haben, sind die Durchmesser nur wenig verschieden, und deshalb liegen die Konturen in der Zeichnung sehr nahe beieinander; man erhält also kein rechtes Bild von den wirklichen Verhältnissen. Hier noch mehr als in dem vorangegangenen Falle wird man daher die Darstellung durch Linien bei weitem vorzuziehen haben.

Zu den Raumgrößen gehören schließlich auch die **Winkel**, d. h. die Richtungen, verglichen mit bestimmten Normalrichtungen (horizontalen, vertikalen, östlichen usw.). Die Darstellung solcher Größen ist natürlich sehr einfach, es handelt sich hier nur um eine zeichnerische Wiedergabe der betreffenden Richtung. So stellt Fig. 7 die mittleren **Böschungswinkel** verschiedener, auf eine Grundplatte aufgeschütteter loser Massen, bestehend aus lauter gleichen kleinen Kugeln, dar: am kleinsten ist der Böschungswinkel für Bleischrot, am größten für Schmirgelpulver. Ferner ist in Fig. 8 ein Fall aus der **Optik** wiedergegeben. Die verschiedenen durchsichtigen Stoffe unterscheiden sich untereinander dadurch, wie schief in ihrem Innern ein Lichtstrahl verlaufen darf, um, auf die Grenzfläche stoßend, in die Luft hinaus gebrochen zu werden, während, wenn der Aufprall auf die Grenzfläche schiefer erfolgt, gar kein Licht austritt, sondern al-

Schmirgel 36°
Quarzsand, Mohn 34°
Rübsen 32°
Leinsamen 30°
Gelbklee 28°
Porzellan 23°
Glas 22°
Bleischrot 21°
(sämtlich Mittelwerte)

Fig. 7.

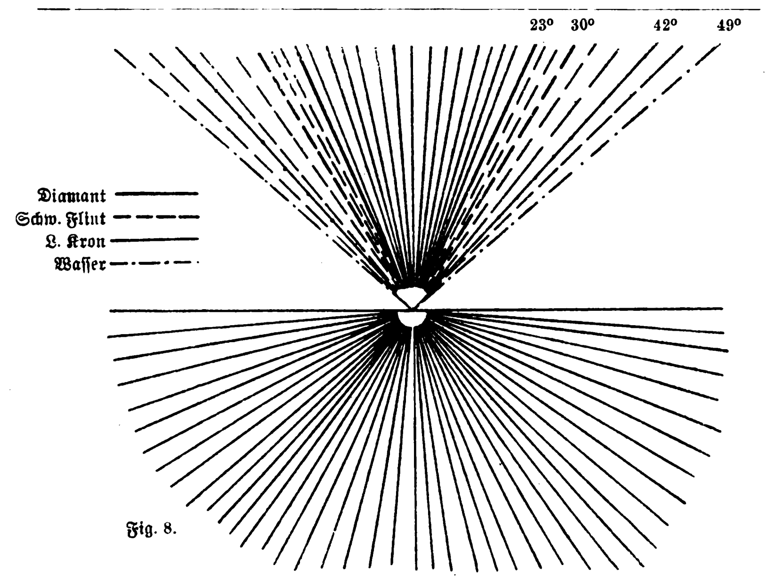


Fig. 8.

les Licht im Innern des Körpers reflektiert wird (totale Reflexion). Je größer bei einem Stoff der Brechungskoeffizient, desto kleiner ist für ihn der Spielraum zu beiden Seiten des Grenzflächenlotes, innerhalb dessen noch Lichtaustritt erfolgt, und das ist in der Figur dargestellt: beim Wasser mißt der Spielraum auf beiden Seiten vom Lot 49°, beim Kronglas 42, beim schweren Flintglas nur 30 und beim Diamanten gar nur 23.

Während es in diesen und ähnlichen Fällen genügt, einen ebenen Schnitt durch das Phänomen zu betrachten, muß man in anderen, um dem Wesen der Erscheinung gerecht zu werden, gleich das räumliche Verhalten, den sogenannten Raumwinkel, betrachten; wie der gewöhnliche Winkel als ein Ausschnitt aus dem Kreise, so ist dieser als ein Ausschnitt aus der Kugel charakterisiert. Fragen wir z. B., wieviele der von einer punktförmigen Lichtquelle ausgehenden Strahlen durch einen Ausschnitt aus der Kugelfläche hindurchtreten, je nachdem diese Fläche, bei stets gleicher Größe, verschieden weit von der Lichtquelle entfernt ist; es handle sich etwa, wie in Fig. 9, um die drei Fälle einer einfachen, doppelten und dreifachen Entfernung. Natürlich kann man nur eine Auswahl aus den Lichtstrahlen wirklich zeichnen, aber das tut nichts, da ja überhaupt die Idee der Lichtstrahlen nur eine der Bequemlichkeit dienende Vorstellung ist und es nur auf die relativen

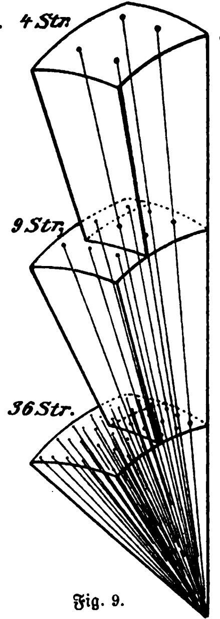


Fig. 9.

Verhältnisse ankommt. Wie man sieht, gehen von 36 Strahlen, die die nächstliegende Fläche durchsetzen, nur neun durch die zweite und nur vier durch die dritte, d. h.: durch die zweite Fläche, die doppelt so weit absteht, geht nur der vierte Teil, durch die dritte, die dreimal so weit absteht, nur der neunte Teil der Strahlen: das ist das Gesetz der quadratischen Abnahme der Strahlungsintensität mit wachsender Entfernung von der Quelle; es gilt nicht bloß für Schall-, Wärme- und Lichtstrahlen, sondern auch für die „Strahlung" der Kraft, also für die universelle Gravitation, für elektrische und magnetische Kräfte.

Drittes Kapitel.

Anzahl von Dingen, Abszissen und Ordinaten. Punkte in der Ebene. Koordinatenpapier. Gesetzmäßige Beziehung. Gebrochene Linien. Graphische Interpolation. Stetige Kurven. Graphische Extrapolation.

Und nun erweitern wir unsere Methode, wir gehen von räumlichen Dingen über zu solchen, deren Realität irgendwelcher anderer Art ist, oder gar zu solchen, die von abstraktem Charakter sind; alle diese Dinge wollen wir in geometrischer Weise, durch ein sichtbares Bild darstellen, und zwar in der Hauptsache durch Linien; erst später werden wir auch Flächen- und körperliche Darstellungen hinzufügen.

Auch hier wollen wir schrittweise vorgehen und einen Hauptfall voranschicken, dessen Verhältnisse insofern klar liegen, als es sich um eine Größe handeln soll, die nur ganzzahlige oder, allgemeiner gesagt, nur bestimmte diskrete Werte annehmen kann, ohne Übergänge zwischen ihnen; dahin gehören u. a. alle Anzahlen von Dingen. Es handle sich etwa um die Einwohnerzahlen der größeren europäischen Staaten. Wir ziehen also eine horizontale Grundlinie, die wir in Zukunft immer Basis oder Abszissenachse nennen werden; wir ziehen ferner von ihrem linken Anfangspunkte aus eine vertikale Linie, die Ordinatenachse heißt; beide Achsen verwandeln wir durch Einteilung in gleiche Abschnitte in Skalen. Im vorliegenden Falle ist die Einteilung der Abszissenachse sehr einfach, wir nehmen hier, den sechs Staaten entsprechend, sechs gleichweit voneinander abstehende Punkte; die Ordinatenachse aber

teilen wir in Zentimeter ein und lassen jedes Zentimeter für 40 Millionen Einwohner gelten. Um das Bild deutlicher lesbar zu machen, ziehen wir durch jeden Teilpunkt eine horizontale Linie. Die Reihenfolge der Staaten wählen wir nach der Größe der Einwohnerzahl, errichten in jedem Teilpunkte der Basis eine Senkrechte von einer der Einwohnerzahl des betreffenden Staates entsprechenden Höhe und erhalten dann das Bild der Fig. 10.

Es sei hier die Bemerkung eingeschaltet, daß man in neuester Zeit, besonders in Tages- und Wochenblättern, aber auch in einigen populären Büchern, des öfteren die senkrechten Linien durch gegenständliche Bilder ersetzt, in unserem Falle also etwa durch Menschen, die die Körpergröße der betreffenden Linien haben, in anderen Fällen durch Kaffeesäcke oder Luftballons. Solche Bilder sind ja zuweilen ganz amüsant, und sie verhindern es vielleicht auch, daß sehr vergeßliche Leser, die auf der nächsten Zeile schon nicht mehr wissen, was auf der vorigen stand, das Thema aus dem Auge verlieren. Im übrigen aber sind solche Darstellungen naturgemäß sehr wenig exakt, lenken die Aufmerksamkeit auf Einzelheiten ab und verlieren sich zuweilen geradezu ins kindische. Wir werden hier ganz im Gegenteil sehen, daß wir unsere Darstellung noch vereinfachen können und müssen.

Die Linien der Fig. 10 haben ebenso wie die der Fig. 1 und 5 zwar verschiedene Längen, aber alle denselben Ausgangspunkt; es sind eben einfache Zahlengrößen. Es gibt auch Fälle, wo es sich um Größen handelt, die von verschiedenen Anfangswerten bis zu verschiedenen Endwerten reichen, die also, außer ihrer verschiedenen Größe, sozusagen auch verschiedene Lage haben; entsprechend wird dann die graphische Darstellung durch gerade Linien ein ganz anderes Bild liefern. Als Beispiel sei hier eines aus der deutschen Geistesgeschichte gewählt. Wir wollen die Zeit, in der die größten deutschen Tonsetzer gelebt haben, darstellen, und zwar durch horizontale Linien, da wir uns die Zeit instinktiv lieber horizontal als vertikal vorstellen. Wir legen also eine Basis zugrunde, die wir in Jahre einteilen, und lassen jedem Tondichter eine andere Linie entsprechen, anfangend und endigend über den betreffenden Zeitmarken der Basis; das Ergebnis ist die Fig. 11. Man bekommt hier einen sehr anschaulichen Eindruck von Epoche und Lebensdauer der Musiker, von denen z. B. Haydn, obgleich weit früher geboren, Mozart lange überlebt hat, von denen

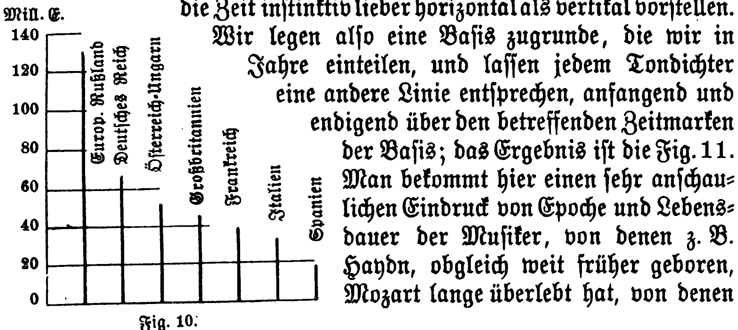


Fig. 10.

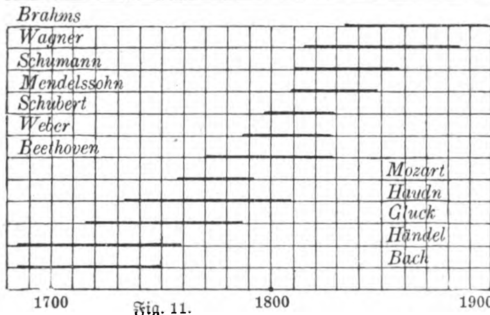
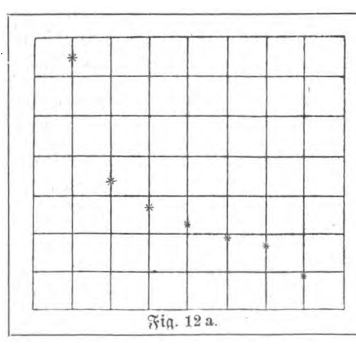


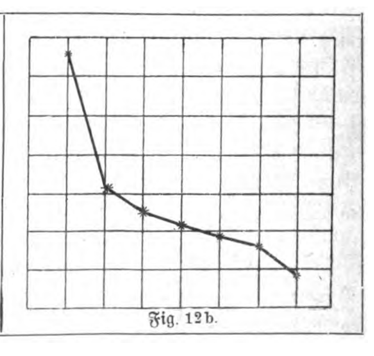
Fig. 11.

Mendelssohn in demselben Jahre geboren ist, in dem Haydn die Augen schloß, und anderes mehr.

Jetzt wollen wir die vorhin angedeutete Vereinfachung unserer Darstellung vornehmen. Es ist doch klar, daß es eigentlich gar nicht auf die bisher gezeichneten Linien ankommt, sondern nur auf ihre Endpunkte und zwar bei einfachen Zahlengrößen, zu denen wir nunmehr zurückkehren, nur auf die oberen Endpunkte, da die unteren alle gleich null sind. Wir wollen diese Endpunkte also jetzt für sich einzeichnen, und zwar als Punkte, besser aber, der deutlichen Sichtbarkeit halber, als Kreuzchen, Sternchen, Ringelchen oder dergleichen. Es ergibt sich alsdann an Stelle der Fig. 10 die neue Fig. 12a oder, wenn wir für das Auge Brücken schlagen von einem dieser Punkte zum anderen, die doch alle dasselbe darstellen, nur in verschiedenen Fällen, wenn wir also je zwei Nachbarpunkte durch eine gerade Linie verbinden, die Fig. 12b. Die graphische Darstellung besteht also jetzt aus einer vielfach gebrochenen Linie, deren sämtliche Stücke geradlinig sind.

Hier ist nun eine technische Einschaltung zu machen. Die einigermaßen exakte Zeichnung graphischer Kurven auf weißem Papier erfordert natürlich erheblichen Aufwand an Zeit und Mühe, und das bei jeder neuen Arbeit von neuem. Man bedient sich daher allgemein statt des leeren des sogenannten Koordinaten-Papiers, das schon seit einigen Jahr-


Fig. 12 a.


Fig. 12 b.

zehnten von der Industrie hergestellt wird, und zwar in verschiedenen, für die verschiedenen Zwecke geeigneten Typen. Für rohe Zwecke genügt Zentimeterpapier, bei dem die Horizontal- wie die Vertikal-Linien je 1 cm voneinander abstehen; besser ist ein Netz mit halben Zentimetern als Abständen, wie in Fig. 13a, und für alle exakteren Zwecke fast ausschließlich in Gebrauch ist das Millimeterpapier, auf dem der Abstand der Nachbarlinien 1 mm beträgt, jede fünfte Linie durch stärkeren und jede zehnte Linie durch noch stärkeren Druck hervorgehoben ist, wie in Fig. 13b; am Rande sind die Zahlen für einige Abszissen und Ordinaten, etwa von Zentimeter zu Zentimeter, oder auch nur von 5 zu 5 cm, angegeben. Gutes Millimeterpapier soll zart gedruckt sein (am besten gelblich oder bläulich), damit die zu zeichnenden Kurven sich deutlich vom Hintergrunde abheben; und es sollen auch die fünften und zehnten Linien möglichst dünn sein, weil sonst nicht unerhebliche Unsicherheiten in der Zeichnung entstehen können.

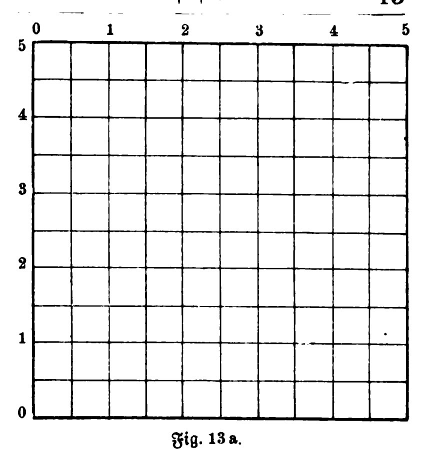


Fig. 13a.

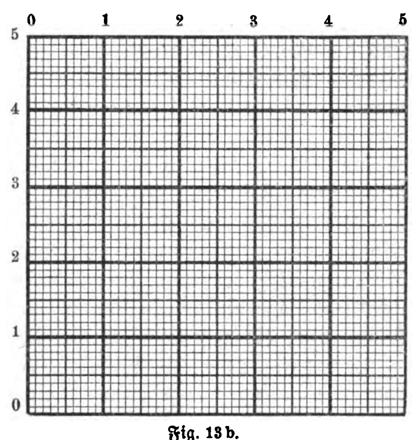
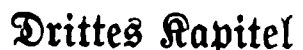


Fig. 13b.

Wir müssen nun noch ein zweites Beispiel ähnlicher Art wie das vorige in Betracht ziehen; ein Beispiel, das uns etwas ganz neues lehren wird. Eine ganz frei drehbare Magnetnadel stellt sich nicht, wie eine gewöhnliche Kompaßnadel, horizontal ein, sondern so, daß sie mit dem nach Norden weisenden Ende abwärts geneigt ist; den Winkel, um den sie das tut, nennt man die magnetische Inklination, und es zeigt sich, daß sie für jeden Ort der Erde einen bestimmten Wert, für verschiedene Orte aber sehr verschiedene Werte hat. Wir wollen nun einige

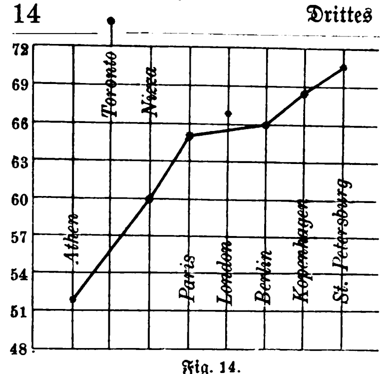


Fig. 14.

recht verschieden gelegene Orte auswählen und ihre Inklination graphisch darstellen. Es fragt sich nur, wie wir die Orte ordnen sollen; und da liegt es aus gewissen Gründen nahe, ihre geographische Breite, d. h. ihre mehr oder weniger nördliche Lage heranzuziehen. Tun wir das und sehen wir zunächst von London und Toronto ab, so erhalten wir als Verbindungslinie der Marken, wie die Fig. 14 zeigt, eine zwar gebrochene, aber überall von links nach rechts in die Höhe steigende Linie. Wir schließen hieraus, daß die Inklination mit wachsender Breite immer größer wird. Aber völlig richtig kann dieses Gesetz nicht sein; denn schon die Marke für London liegt ein wenig zu hoch, und die Marke für Toronto liegt gar in schwindelnder Höhe. Es muß also für die Inklination außer der nördlichen Lage noch etwas anderes maßgebend sein, und das kann nur die Lage nach Westen hin sein, da London von allen europäischen hier aufgeführten Orten der westlichste, Toronto aber noch ganz erheblich weiter westlich gelegen ist. Faßt man beide Einflüsse zusammen, so kommt man zum Verständnis des Phänomens: läge der magnetische Nordpol, d. h. der Punkt, nach dem die Magnetnadel weist, im geographischen Nordpol, d. h. im Endpunkte der Drehungsachse der Erde, so würde es für die Inklination nur auf die nördliche Lage ankommen; da er aber im nördlichsten Amerika liegt, kommt auch die westliche Lage in Betracht.

In der Fig. 14 ist die Basis in lauter gleiche Abschnitte geteilt, gerade wie in Fig. 10; jeder der Teilpunkte entspricht einem der Orte, für die die Inklination angegeben ist. Da wir nun aber wissen, daß es in erster Reihe auf die nördliche Lage ankommt, werden wir doch eine wesentlich wissenschaftlichere Darstellung erhalten, wenn wir, wie das in Fig 15 geschehen ist, die Abszissenachse nach Breitengraden teilen, anfangend bei 36° (ein südlicherer Ort kommt nicht vor), abschließend mit 60° (ein noch nördlicherer Ort kommt ebenfalls nicht vor). Wir haben also jetzt zwei Größen, die wir miteinander in Beziehung setzen: die geographische Breite und die Inklination; die letztere ist abhängig von der ersteren, sie ist, wie man sagt, eine Funktion der ersteren. Wir wollen nun ferner, um den Einfluß der Breite rein in die Erscheinung treten zu lassen, nur solche Orte auswählen, die ungefähr auf demselben

Meridian liegen (genau kommt es darauf nicht an); das sind also etwa die Orte, die in Fig. 15 gewählt sind. Wie man sieht, wird jetzt die Verbindungslinie der Punkte nahezu eine gerade Linie, sie stellt also ein einfaches Naturgesetz dar. Aber wir wollen es vorläufig mit dieser Andeutung bewenden lassen, um nicht späterem vorzugreifen.

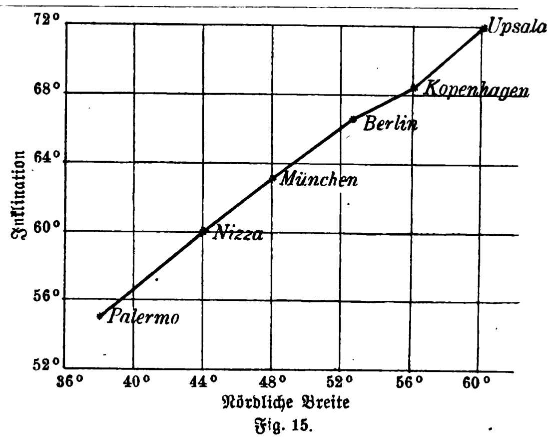


Fig. 15.

Ein drittes Beispiel „gebrochener graphischer Linien", und zwar eines, bei dem die Linie bald steigt, bald fällt, bietet das berühmte periodische System der chemischen Elemente. Die einfachen chemischen Stoffe stellt man sich bekanntlich als aus Atomen aufgebaut vor, und diesen Atomen muß man, um die chemischen Erscheinungen zu begreifen, verschiedene Eigenschaften beilegen, so unter anderem verschiedene Masse und verschiedenes Volumen. Trägt man nun in irgendeinem Maßstab die Atommassen auf der Abszissenachse, die Atomvolumina auf der Ordinatenachse auf, markiert den Endpunkt jeder, auf ein bestimmtes Element bezüglichen Vertikalen mit einem Kreuz und verbindet alle Kreuze, so erhält man die periodisch ab- und aufsteigende Linie der Fig. 16; die Linie hat einige Lücken, weil noch nicht für alle Stoffe die Atomvolumina genügend bekannt sind (diese Elemente sind unten an der Basis angegeben). Die graphische Darstellung dieser Verhältnisse ist geradezu epochemachend geworden für den weiteren Fortschritt in der Erkenntnis der Grundlagen der Chemie, ja auch positiv für bedeutsame Entdeckungen neuer Tatsachen.

Eine große Klasse von Darstellungen durch gebrochene gerade Linien bezieht sich auf die Werte, die bestimmte Dinge im Laufe der Zeit annehmen; die Zeit ist also hier Abszissenachse. Unter den zahlreichen Beispielen, die sich darbieten, sei eines aus der Volkswirtschaft herausgegriffen: die Schwankungen des Preises eines Welthandelsartikels. Wir wählen, um ein recht kräftiges Bild zu erhalten, einen Stoff und einen Zeitraum, in denen große Schwankungen stattgefunden

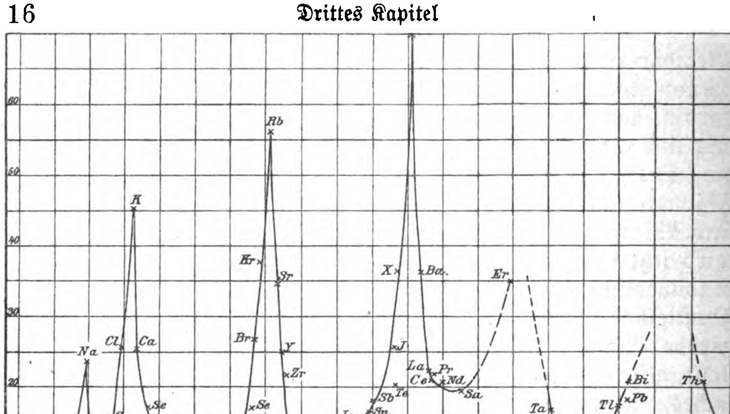


Fig. 16.

haben: den Weltmarktpreis des Kupfers in den Jahren 1903 bis 1905. Er ist durch die ausgezogene Kurve der Fig. 17 veranschaulicht. Man sieht, wie der Preis, von starken monatlichen Schwankungen abgesehen, von 1903 auf 1904 stark fällt, um dann von 1904 auf 1905 ganz gewaltig in die Höhe zu schnellen.

Die Fig. 16 und 17 bieten nun noch eine weitere Eigenheit dar, die wir als Brücke zum folgenden benutzen wollen. Wie man sieht, ist in Fig. 16 die Linie der Atomvolumina nicht aus lauter geraden Stücken zusammengesetzt, wie es eigentlich sein sollte, sie ist vielmehr durch Abrundung der Ecken in eine stetig gekrümmte Linie verwandelt worden. Das hat im vorliegenden Falle keine weitere Bedeutung, es ist mehr die Beseitigung eines Schönheitsfehlers In anderen Fällen aber ist dieses Verfahren von grundlegender Bedeutung, und solchen Fällen müssen wir uns jetzt zuwenden. Ferner ist in Fig. 17 außer der ausgezogenen Kurve noch eine gestrichelte verzeichnet, die in stetiger Krümmung verläuft und aus der ersten dadurch gewonnen wurde, daß man von den monatlichen, unregelmäßigen Schwankungen, die nur ein untergeordnetes Interesse beanspruchen dürfen, absah und nur die großen Züge der Schwankungen beibehielt. Auf diese und viele ähnliche Arten gelangt man also zu *stetig gekrümmten Kurven*, und wir wollen jetzt dieses Problem allgemein und prinzipiell untersuchen.

Es handle sich also darum, in welcher Weise sich eine Größe ändert

wenn sich eine andere, von der sie abhängig ist, in stetiger Weise ändert; man nennt dann diese letztere Größe die unabhängige, die erstere die abhängige Variable oder auch jene die Variable schlechthin, diese ihre Funktion. Eine Größe, die sich stetig ändert, nimmt nun offenbar nach und nach unzählige Werte an, und wir können unmöglich, weder durch Beobachtung noch durch Rechnung, diese unzähligen Werte feststellen, wir müssen vielmehr eine Auswahl treffen. Es seien nun in Fig. 18a für die sieben auf der Abszissenachse angemerkten Punkte die durch die sieben Kreuzchen bezeichneten Werte der Funktion beobachtet, und es soll die der Funktion in ihrem ganzen Verlaufe entsprechende Kurve konstruiert werden. Da liegt es natürlich am nächsten, die Punkte durch gerade Linien miteinander zu verbinden, wie in Fig. 18b; aber es leuchtet sofort ein, daß diese Darstellung nicht die vollkommenste ist, da doch die Kurve einen geknickten Verlauf hat, und zwar nicht aus inneren Gründen, sondern lediglich deshalb, weil gerade die an den Knickstellen gelegenen Werte der Funktion beobachtet worden waren. Wir wollen deshalb die Punkte, wie in Fig. 18c, nicht durch gerade Stücke, sondern im ganzen durch eine möglichst stetig verlaufende Kurve verbinden. Jetzt haben wir das Problem gelöst, wir haben auch für alle nicht beobachteten Stellen

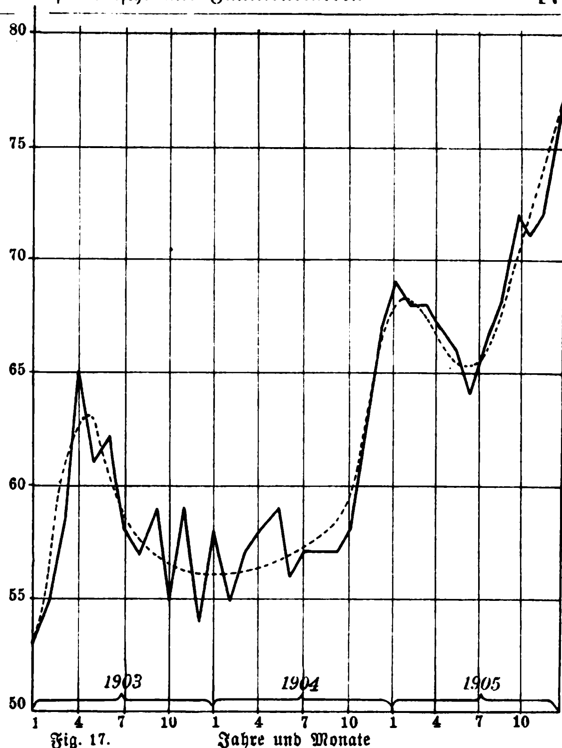


Fig. 17.

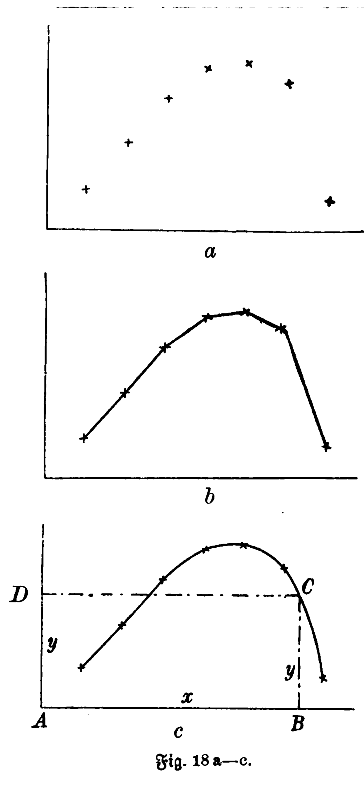
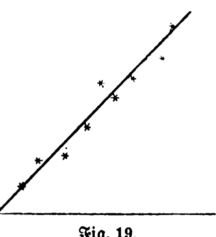


Fig. 18 a—c.

die zusammengehörigen Werte der Variablen und der Funktion ermittelt, wir brauchen nur von irgendeinem Kurvenpunkte das Lot auf die Basis zu fällen, dann entspricht dem Werte der Variablen, der durch die Strecke AB vom Anfangspunkte bis zum Fußpunkte des Lotes dargestellt wird, der Wert der Funktion BC, der durch die Länge des Lotes dargestellt ist. Der der Horizontalebene angehörige Punkt C ist auf diese Weise, wie man sagt, durch rechtwinklige Koordinaten festgelegt, die man mit x (Abszisse) und y (Ordinate) bezeichnet; in unserem Falle ist also $x = AB$, $y = BC$ (oder auch gleich dem gleichgroßen, auf der Ordinatenachse abgetragenen Stücke AD). Die **rechtwinkligen Koordinaten** sind weitaus das wichtigste, wenn auch nicht einzige Hilfsmittel zur Fixierung von Punkten und ganzen Konfigurationen in der Ebene (und, wie gleich hinzugefügt werden mag, im Raume, wobei dann natürlich noch eine dritte, auf den beiden ersten senkrechte Achse, die z-Achse, hinzugenommen werden muß).

Das angedeutete Verfahren wird sich dann stets zwanglos durchführen lassen, wenn die herausgegriffenen Werte einer durch gesetzmäßige Rechnung gefundenen Kurve angehören. Handelt es sich aber um eine Reihe beobachteter Werte, denen doch mit Rücksicht auf die Unvollkommenheit der menschlichen Sinnesorgane und der zu ihrer Unterstützung dienenden Apparate eine gewisse Ungenauigkeit anhaftet, so wird es sich selten ereignen, daß man die Kurve ohne offensichtlichen Zwang durch die empirisch festgelegten Punkte hindurchführen kann; sie würde bei diesem Verfahren vielmehr in den meisten Fällen unwahrscheinliche Einbuchtungen oder gar Knicke erhalten. Es ist dann unter Umständen nicht bloß erlaubt, sondern geradezu geboten, die Kurve zwischen den Fixpunkten hindurch, aber möglichst nahe an ihnen vorbei derart zu führen, daß ein Teil der Fixpunkte auf die eine, ein anderer auf die andere


Fig. 19.

Seite zu liegen kommt, und daß die Kurve eine möglichst einfache und stetige Form erhält. Sind z. B. die in Fig. 19 mit Sternchen bezeichneten Punkte gegeben, so wird man kaum daran zweifeln, daß das wahre Gesetz, wenigstens in erster Annäherung, das einer geraden Linie sei; denn eine solche läßt sich so legen, daß die Punkte zu beiden Seiten zu liegen kommen, ohne daß dabei eine bestimmte Tendenz der Abweichung als vorherrschend zu erkennen wäre. Man nennt diese Methode „Graphische Interpolation“, man darf sie immer nur nach reiflicher Erwägung der Umstände und mit der entsprechenden Vorsicht anwenden; insbesondere muß man sich vorher überzeugen, ob man annehmen darf, daß genügend viele Fixpunkte vorliegen, und daß nicht etwa solche fehlen, die eine besonders extreme Lage haben. Hat man z. B. die Lufttemperatur an einem Orte vormittags um 8 Uhr und abends um 8 Uhr beobachtet, so kann man daraus unmöglich eine Kurve des Temperaturverlaufs während 24 Stunden ableiten; das würde ja, da jene beiden beobachteten Temperaturen meist ziemlich identisch sein werden, einfach eine horizontale Gerade werden, also bedeuten, daß die Temperatur während der 24 Stunden überhaupt immer dieselbe bleibt. Hat man statt dessen um 2 Uhr nachmittags und um 2 Uhr nachts beobachtet, so liegt die Sache schon etwas besser, weil das ungefähr die beiden Extreme der Temperatur nach oben und unten sind; aber auch jetzt würde die Kurve noch sehr falsch ausfallen, sie würde nämlich aus einer gerade ansteigenden und einer gerade absteigenden Linie bestehen, und diese beiden Geraden würden in Spitzen aneinander stoßen. Man muß daher mindestens alle vier gedachten Beobachtungen anstellen, noch besser aber, statt des sechsstündigen Intervalls, ein dreistündiges zugrunde legen; die aus den acht beobachteten Werten interpolierte Kurve, wie sie in Fig. 20 vorgeführt ist, wird dann der Wahrheit schon ziemlich nahe kommen; und an-

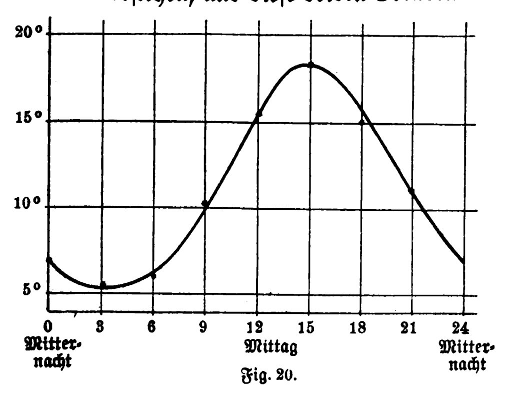


Fig. 20.

derseits zeigt sie, daß in der Tat einige Beobachtungen entweder ungenau waren oder daß zu diesen Zeiten zufällige Einflüsse den gleichmäßigen Gang der Temperatur vorübergehend gestört haben.

Allgemein ergibt sich die Forderung: eine aus Einzelbeobachtungen abgeleitete Kurve wird um so genauer, je mehr und je besser verteilte Beobachtungen vorliegen; und zwar müssen an den Stellen, wo die betreffende Größe sich rasch ändert, viele Beobachtungen gemacht werden, während an den übrigen weniger Beobachtungen genügen. Hat man, sei es aus diesen Beobachtungen, sei es aus einer vollkommen zuverlässigen Theorie, das Gesetz der Größe gefunden, so kann man die Kurve so exakt herstellen, wie das überhaupt mit zeichnerischen Hilfsmitteln möglich ist; das Gesetz ist eben sozusagen die Gesamtheit aller überhaupt möglichen Beobachtungen Von einer in gewissem Sinne noch vollkommeneren Herstellung der Kurven wird später die Rede sein.

Wenn hiernach schon die Methode der graphischen Interpolation nur mit Vorsicht und in bestimmter Weise anzuwenden ist, soll sie zuverlässigen Nutzen stiften, so gibt es eine ihr verwandte und sie gewissermaßen erweiternde Methode, die außerordentlich gefährlich ist und am besten überhaupt nicht, da aber, wo sie mangels anderer Möglichkeiten unumgänglich ist, nur mit der äußersten Vorsicht und in dem Bewußtsein gebraucht werden darf, daß man jederzeit gewärtig sein muß, später einmal zu der Erkenntnis zu kommen, daß die Art der Ausführung doch falsch oder mindestens sehr ungenau gewesen ist. Das ist die Methode der „graphischen Extrapolation". Bei der Interpolation verbindet man die wirklich festgelegten Punkte durch möglichst stetige Kurvenstücke und findet so zu den direkt ermittelten Werten indirekt noch alle Zwischenwerte. Bei der Extrapolation versucht man die gefundene Kurve in möglichst ungezwungener Weise über ihre Endpunkte oder auch nur über einen von ihnen hinaus zu verlängern und dadurch neue Werte, außerhalb des Bereichs der direkt gefundenen, zu ermitteln. Haben wir z. B. nach dem bisherigen Verfahren oder sonstwie die in Fig. 21 stark ausgezogene Kurve gefunden, so sind wir in starker Versuchung, sie in der durch Strichelung angedeuteten Weise fortzusetzen, und es wird Fälle geben, wo eine spätere Ausdehnung der direkten Beobachtungen diesen vermuteten Verlauf auch wirklich bestätigt. In anderen Fällen aber wird die extrapolierte Kurve durch die Erweiterung unserer Kenntnisse sich als recht ungenau, wenn nicht geradezu als

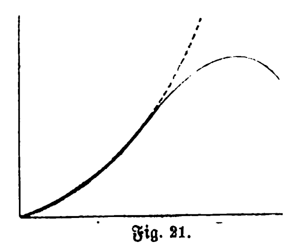


Fig. 21.

falsch erweisen. So ist in unserer Figur die schwach ausgezogene Kurve, die das Ergebnis späterer direkter Feststellungen sein soll, von der extrapolierten ihrem ganzen Charakter nach verschieden und räumlich von ihr nach und nach immer weiter abliegend. Es gibt eben eine ganze Anzahl von Möglichkeiten, ein vorliegendes Kurvenstück zwanglos fortzusetzen; bei der graphischen Extrapolation wählen wir willkürlich eine von ihnen aus, es sei denn, daß wir bestimmte Anhaltspunkte für den weiteren Verlauf der Kurve haben. Nehmen wir z. B. an, die Kurve stelle die nach und nach steigende Temperatur eines Körpers dar, unter dem man ein Feuer unterhält, und es sei das Experiment dadurch plötzlich zu Ende gekommen, daß der Körper heruntergefallen oder zerplatzt ist; dann können wir annehmen, daß bei Fortsetzung des Versuchs die Temperatur immer weiter gestiegen wäre, daß also die gestrichelte Kurve vermutlich die richtige wäre; vielleicht aber wäre doch die Zunahme der Temperatur allmählich langsamer geworden, weil der Körper mit der Zeit nicht mehr soviel Wärme hätte aufnehmen können, dann würde die Kurve zwar immer noch steigen, aber allmählich langsamer und langsamer, und zuletzt wäre sie vielleicht horizontal geworden. Extrapolationen haben also immer nur einen sehr zweifelhaften Wert und können nur dazu dienen, gewisse unsichere Anhaltspunkte so lange zu geben, bis man in der Lage ist, die Ausfüllung dieser Lücke auf direktem Wege vorzunehmen.

Viertes Kapitel.

Darstellung desselben Falles auf zwei oder mehr verschiedene Arten. Absolute und relative Ordinaten. Logarithmenpapier. Ansteigende Kurven. Darstellung von Größenordnungen. Absteigende Kurven. Kurven mit Gipfeln. Symmetrische und unsymmetrische Kurven.

Wir wollen nun eine Reihe von Beispielen graphischer Kurven aus verschiedenen Wissensgebieten betrachten und dabei Gelegenheit nehmen, Detailfragen zu besprechen, die sich bei ihrer Diskussion einstellen Wir beginnen mit einem dem persönlichen Interesse des Menschen nahestehenden Problem aus der Versicherungswissenschaft: mit der Frage der Sterblichkeit des Menschen. Von 1000 gleichzeitig Geborenen bleiben von Jahr zu Jahr weniger übrig, bis schließlich auch der Letzte dahingegangen ist. Wir tragen also die Zahl der vergangenen Jahre in

horizontaler, die Anzahl der Überlebenden in vertikaler Richtung auf und erhalten, wenn wir eine der zahlreichen, im großen Ganzen übereinstimmenden Tafeln der staatlichen Statistik oder der Versicherungsgesellschaften benutzen, die in Fig. 22 wiedergegebene Kurve. Wie man sieht, nimmt die Zahl der Überlebenden im ersten Jahre sehr stark ab (Kindersterblichkeit!), dann langsamer, dann wieder schneller und zuletzt ganz langsam. Dieselbe Erscheinung kann man nun noch anders darstellen, und hier hat man Gelegenheit zu sehen, wie vorsichtig man bei graphischen Darstellungen (und bei statistischen Untersuchungen überhaupt) zu Werke gehen muß, will man nicht zu ganz irrigen Schlüssen gelangen. Hat man doch derartige Vorkommnisse nicht selten zu einer Geringschätzung statistischer Methodik ausgenützt, natürlich ganz mit Unrecht. Wir wollen also jetzt als Ordinaten die Anzahl der in den einzelnen Jahren Gestorbenen (nicht der Überlebenden) auftragen und erhalten nunmehr die Fig. 23, und zwar die schwach gezogene Kurve (ihr erster Teil ist nicht sichtbar, weil er mit der starken Kurve zusammenfällt). Da die Kurve anfangs steil abfällt, dann langsam zu einem, übrigens sehr mäßigen Maximum ansteigt, um schließlich auf null herabzusinken, könnte man schließen: die Sterblichkeit ist im zarten Kindesalter am größten, an der Grenze von Kindesalter und Jugend am kleinsten, erreicht dann bei etwa 75 Jahren ein Maximum, das aber nicht so groß ist wie das des Säuglingsalters, und fällt dann wieder stark ab, um schließlich im höchsten Greisenalter null zu werden. Dieser Satz enthält Richtiges und Falsches in offensichtlicher Mischung, und der Fehler liegt in der unkritischen Aufstellung des Begriffs „Sterblichkeit". Diese ist doch nicht, wie hier stillschweigend angenommen wurde, die Anzahl der von ursprünglich 1000 Geborenen in dem betreffenden Jahre Sterbenden, sondern es ist die Anzahl der in diesem Jahre Sterbenden, berechnet auf 1000 am Anfange dieses Jahres noch Lebende; und in diesem Jahre leben eben nicht mehr 1000, sondern, je nach der vergangenen Zeit, einige oder viele oder sehr viele weniger. Berücksichtigt man das durch eine entsprechende Änderung (man muß die Anzahl der in diesem Jahre Sterbenden mit 1000 multiplizieren und durch die Anzahl der zu Anfang des Jahres noch Lebenden dividieren, letztere aus der Fig. 22 entnommen), so erhält man die in Fig. 23 stark

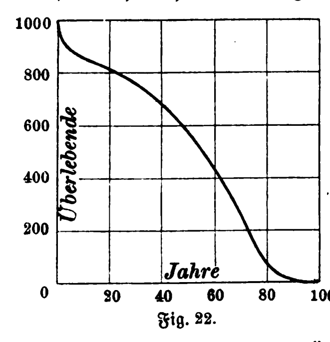
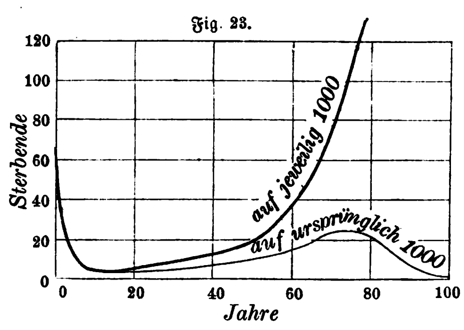


Fig. 22.

ausgezogene Kurve, die zwar anfangs mit der schwachen zusammenfällt (bei Anwendung eines größeren Maßstabes für die Zeichnung würde das gemeinsame Stück kürzer werden), sich dann aber mehr und mehr von ihr entfernt und schließlich einen ganz anderen Charakter annimmt: sie zeigt zwar ebenfalls das dem Säuglingsalter charakteristische Maximum und das der frühen Jugend entsprechende Minimum, dann aber steigt sie an, und zwar immer rascher, überholt das Anfangsmaximum und steigt immer noch weiter. Man erhält also den neuen, nunmehr richtigen Satz: Die Sterblichkeit beginnt mit einem relativen Maximum, erreicht zwischen dem 12. und 14. Jahre ihr Minimum und steigt dann, erst langsam, dann immer schneller bis ins höchste Greisenalter.

Fig. 23.



Wenn es in diesem Falle ohne weiteres einleuchtet, welche Darstellung vorzuziehen ist, so gibt es in anderen Fällen zwei oder mehrere Möglichkeiten, die zunächst als völlig gleichberechtigt erscheinen und doch zu ganz verschiedenen Ergebnissen oder, wie wir besser sagen wollen, zu ganz verschiedenen Auffassungen der Angelegenheit führen. Nehmen wir ein Beispiel aus der geographischen Statistik und stellen wir die Einwohnerzahl von Groß-Berlin für verschiedene Zeitpunkte dar; ein Fall, der sich im Hinblick auf die bekanntlich ganz außergewöhnlich kräftige Entwicklung der Reichshauptstadt besonders eignet, um stark ausgesprochene Kurven zu erhalten. Als Abszissen nehmen wir also die Jahreszahlen von 1860 bis 1910, als Ordinaten die Einwohnerzahlen in Millionen, mit 0,4 anfangend und mit 3,6 aufhörend. Für jede der in dem gedachten Zeitraume erfolgten Zählungen tragen wir einen Punkt ein, verbinden diese und erhalten so die Kurve *a* der Fig. 24; sie steigt allmählich immer steiler in die Höhe. Nun ist das aber nicht merkwürdig, es ist nach dem Grundsatze: wo viel ist, kommt viel hin, eigentlich selbstverständlich. Daß in Berlin, als es zwei Millionen Einwohner hatte, viel mehr Menschen geboren wurden als zu der Zeit, wo es nur eine halbe Million hatte, ist einleuchtend; und wenn dementsprechend auch die Zahl der Todesfälle größer war, so bleibt doch auch die Differenz beider Zahlen in entsprechendem Maße größer; und auch

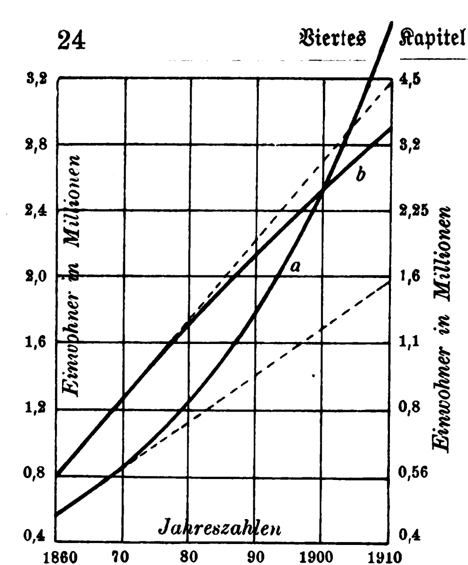


Fig. 24.

der Zug von außerhalb wird, solange die Bedingungen in gleicher Weise bestehen bleiben, mit dem Wachstum der Stadt immer größer. Was uns interessiert, ist auch gar nicht das absolute Wachstum, sondern das relative; wir wollen wissen, um welchen Bruchteil ihrer selbst die augenblickliche Bevölkerung im Laufe eines jeden Jahres zugenommen hat. Und zu diesem Zwecke müssen wir die Ordinaten in anderer Weise wählen, nämlich nicht so, daß sie, wie die an der linken Seite der Figur zahlenmäßig angegebenen, in gleichen Intervallen zunehmen, als sogenannte „arithmetische Reihe", sondern als „geometrische Reihe", d. h. derart, daß immer auf derselben Strecke eine Verdoppelung des Wertes eintritt, z. B., wie die Zahlen rechts besagen, von 0,4 (unterste Zahl) auf 0,8 (zweitnächste), von dort auf 1,6 (wieder zweitnächste) usw.; und auch die Zwischenabteilungen halbieren nicht die Differenz zwischen den beiden Nachbarwerten (denn dann müßte doch die Ordinate zwischen 0,4 und 0,8 mit 0,6 bezeichnet sein), sondern sie stellen das sogenannte geometrische Mittel dar, und dieses ist 0,56, d. h. es verhält sich 0,4 : 0,56 wie 0,56 : 0,8; ebenso ist 1,1 das geometrische Mittel zwischen 0,8 und 1,6 usw. Trägt man jetzt die Einwohnerzahlen von Groß-Berlin wiederum ein, so erhält man die Kurve *b*, also eine allmählich nicht rascher, sondern langsamer ansteigende Kurve (zum Vergleich sind für beide Kurven die geradlinigen Fortsetzungen ihrer Anfangsstücke, ihre sogenannten Tangenten, mit angegeben); und das ist der Ausdruck dafür, daß sich das relative Wachstum von Groß-Berlin, infolge einer gewissen Sättigung, mit der Zeit verlangsamt. In viel höherem Maße würde diese Sättigung zum Ausdrucke kommen, wenn die Einwohnerzahl des offiziellen Berlins dargestellt würde, wie das in Fig. 25 geschehen ist: hier steigt schon die gewöhnliche Kurve *a* (Maßstab links) von 1885 ab nicht mehr rascher, sondern immer langsamer an, und die relative Kurve *b* (Maßstab rechts) verlangsamt ihren Anstieg schließlich so weit, daß sie nahezu horizon-

tal wird: die Einwohnerzahl der eigentlichen Stadt Berlin nimmt, wegen der starken Abwanderung in die Vororte, überhaupt nicht mehr oder kaum noch zu. In mancher Hinsicht noch drastischer kann man das zur Anschauung bringen, wenn man nicht die Einwohnerzahlen, sondern die jährliche prozentische Zunahme als Ordinate aufträgt; man erhält dann die Fig. 26. Sie zeigt, daß die prozentische Zunahme der Bevölkerung von Berlin immer geringer geworden ist und nahe daran ist, in eine Abnahme überzugehen (die Behauptung, daß eine solche Abnahme wirklich bevorstehe, wäre freilich ein Verstoß gegen das früher über die Methode der Extrapolation gesagte); außerdem läßt aber die Kurve noch des weiteren erkennen, daß in den einzelnen Perioden ziemlich starke Schwankungen im Fortschritt stattgefunden haben, denn einige Kreuzchen liegen weit über, andere weit unter der Kurve.

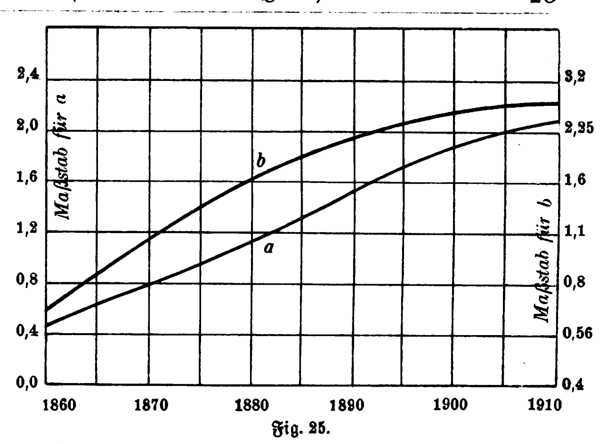


Fig. 25.

Es sei hier eingeschaltet, daß man, da die graphische Darstellung in der relativen Form (nach der geometrischen Reihe) sehr vielfältige Anwendung findet, neuerdings auch besonderes Koordinatenpapier dafür herstellt, bei dem zwar die Abszissen in Millimeter geteilt sind, die Ordinaten aber in geometrischer Reihe wachsen, derart, daß die Linien gleicher Differen-

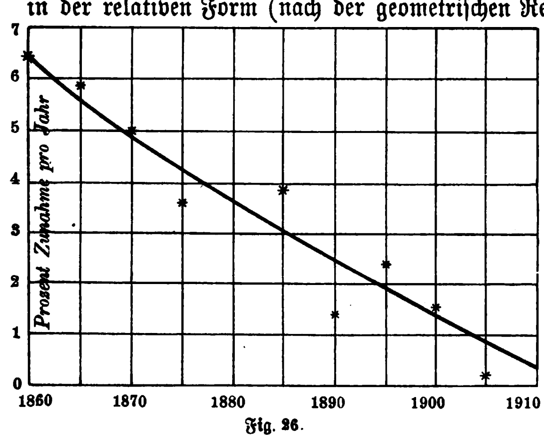


Fig. 26.

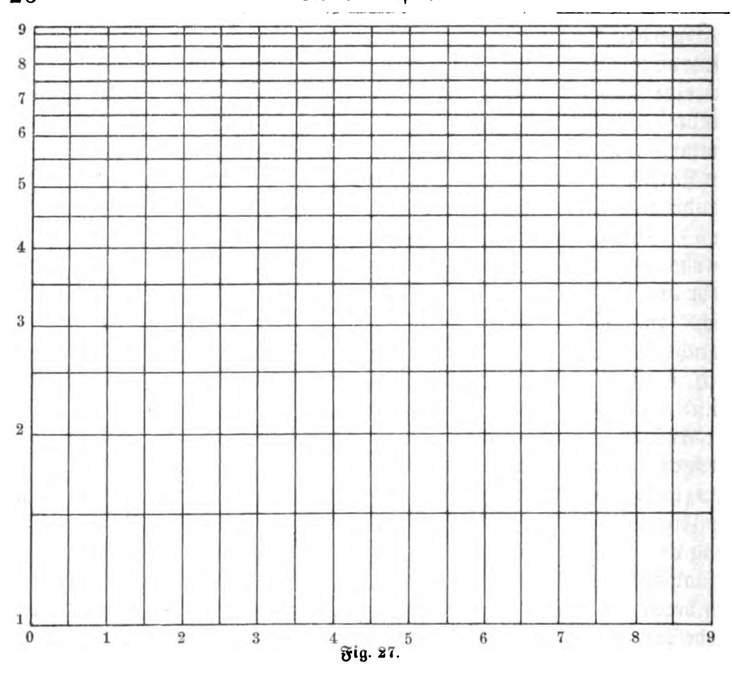


Fig. 27.

zen immer näher aneinander rücken. Man nennt solches Papier „Logarithmenpapier", aus Gründen, die einem Teil der Leser einleuchten wird; es sei in dieser Hinsicht nur kurz bemerkt, daß, wenn gewisse Zahlen eine geometrische Reihe bilden, ihre Logarithmen eine gewöhnliche oder arithmetische Reihe bilden; so sind z. B. von den Zahlen 1 — 10 — 100 — 1000 usw. die Logarithmen: 0 — 1 — 2 — 3 usw. In Fig. 27 ist ein Stück solchen Logarithmenpapiers abgebildet. Übrigens ist auch noch anderes Netzpapier käuflich, nämlich solches, bei dem nicht bloß die Ordinaten, sondern auch die Abszissen in dieser Weise eingeteilt sind; aber darauf wollen wir nicht näher eingehen.

Unter den vielen Anwendungen der logarithmischen Darstellung seien hier zwei ausgewählt. Wenn eine Funktion sich mit der Variablen, von der sie abhängt, so ändert, daß sie, wenn man diese immer um gleichviel zunehmen läßt, ebenfalls immer um gleichviel (wenn auch im allgemeinen um einen anderen Betrag) zunimmt, so erhält man als graphisches Bild eine nach rechts ansteigende Gerade; man nennt eine solche Funktion eine **lineare**; ein Beispiel bietet die **Längsdehnung** eines

von der Decke herabhängenden Drahtes aus möglichst reinem Metall, als Funktion der Spannung, die man ihm durch angehängte Gewichte erteilt; in Fig. 28 ist die entsprechende gerade Linie wiedergegeben. Wenn dagegen eine Funktion immer dann, wenn

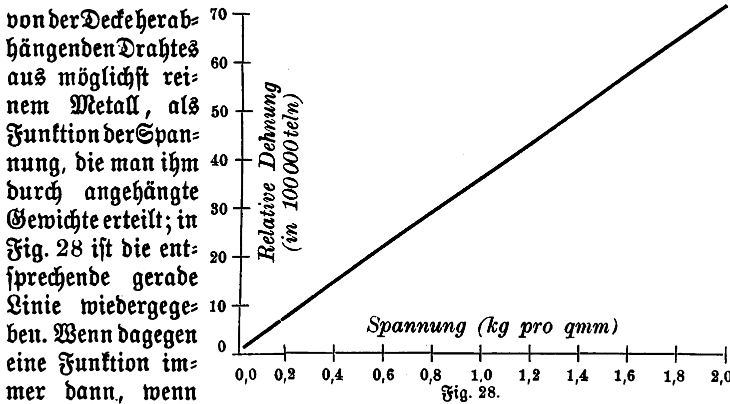


Fig. 28.

man die Variable um gleichviel wachsen läßt, nicht ebenfalls immer um gleichviel zunimmt, sondern sich immer in gleichem Verhältnis vervielfacht, wenn also ihre Werte, die einer arithmetischen Reihe von Werten der Variablen entsprechen, ihrerseits eine geometrische Reihe bilden, so erhält man keine Gerade, sondern eine allmählich immer rascher steigende Linie. Eine solche kennen wir ja schon von dem Beispiel der Einwohnerzahl von Berlin her. Aber hier soll es sich um die Frage handeln: stellt eine solche Kurve wirklich das Gesetz der geometrischen Reihe dar, ist die Kurve wirklich, wie man sagt, eine Exponentialkurve und dementsprechend die Funktion eine Exponentialfunktion, und wie kann man feststellen, ob sie das ist? Denn nach rechts hin immer rascher ansteigende Kurven gibt es viele, und das genaue Gesetz kann man ihr nicht oder doch nicht ohne ganz besondere Übung ansehen. Die Antwort lautet einfach: man nehme statt des gewöhnlichen Koordinatenpapiers logarithmisches und zeichne die Kreuzchen von neuem ein; wenn die erste Kurve wirklich eine Exponentialkurve war, muß die jetzige zweite eine exakte gerade Linie werden; denn die Logarithmusfunktion ist die Umkehr der Exponentialfunktion, die Krümmung der Kurve muß also durch das logarithmische Papier gerade aufgehoben werden. In dem Falle der Bevölkerung von Berlin war das nicht genau der Fall; denn auf dem logarithmischen Papier erhielten wir keine gerade, sondern eine allmählich langsamer ansteigende Linie. Ein Beispiel, wo es genau stimmt, bietet die Spannkraft des Alkoholdampfes dar. Wie man weiß, ist die Spannkraft eines Dampfes desto größer, je höher die Temperatur ist; aber das Gesetz ist bei verschiedenen Stoffen verschieden. Beim Alkohol ist es durch die Kurve *a* der Fig. 29 dargestellt, die sich auf gewöhn-

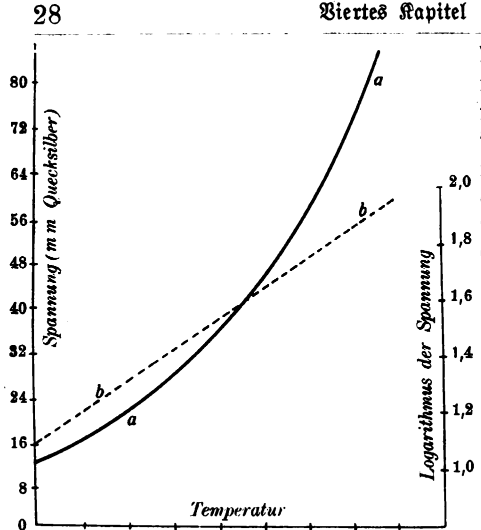


Fig. 29.

liche Koordinaten bezieht; nimmt man nun logarithmisches Ordinatenpapier, so erhält man die Kurve b; und diese ist, wie man sieht, genau geradlinig. Die Kurve a ist also eine richtige Exponentialkurve. Man hat demnach hier ein sehr erwünschtes Mittel, um Dinge indirekt festzustellen, die man direkt wegen der begrenzten Fähigkeiten des Auges nicht entscheiden kann.

Die andere der in Aussicht gestellten Anwendungen betrifft die vergleichende Darstellung von Werten, die irgendeine Eigenschaft bei verschiedenen Stoffen oder Körpern oder in verschiedenen Fällen annimmt; und zwar soll es sich um Werte handeln, die innerhalb außerordentlich weiter Grenzen variieren, so daß man entweder die größten Werte gar nicht mehr auf das Papier bekommt oder aber, wenn man einen kleineren Maßstab wählt, die kleinsten so winzig werden, daß man sie nicht oder doch nur sehr ungenau einzeichnen kann. In solchen Fällen drückt man den Höhenmaßstab dadurch gewissermaßen zusammen, daß man an Stelle der gewöhnlichen Ordinaten logarithmische nimmt. Als Beispiel möge eine kleine Auswahl der Geschwindigkeiten dienen, die in der Natur vorkommen. Bedenkt man, daß die kleinsten davon nach Bruchteilen eines Millimeters in der Sekunde, die größten aber nach Hunderttausenden von Kilometern messen, so sieht man ein, daß es aussichtslos ist, sie auf einer und derselben graphischen Darstellung zu vereinigen. Anders, wenn man statt der Zahlen ihre Logarithmen nimmt; natürlich wird die Darstellung weniger genau, sie bringt gewissermaßen nicht die Größen selbst zum Ausdruck, sondern nur das, was man ihre Größenordnung nennt, aber dafür bietet sie eben eine einheitliche Vergleichsmöglichkeit. In der Fig. 30 sind also als Ordinaten die Logarithmen der Zahlen eingetragen, die die Geschwindigkeit in Zentimetern pro Sekunde ausdrücken; man kann statt dessen, um dem Laien näherzukommen, auch sagen, daß die Anzahl der an

der Geschwindigkeitszahl hängenden Nullen ausgedrückt ist. So fängt die Kurve z. B. an mit der ungeheuren Geschwindigkeit des Lichts, die das Dreifache von 10 Milliarden Zentimeter pro Sekunde ausmacht, sie fängt also mit einer Ordinate an, die zwischen 10 und 11 liegt (denn unsere Zahl hat zehn Nullen und davor noch eine 3); sie hört auf mit der Geschwindigkeit, mit der sich ein Gletscher vorwärts bewegt; diese Geschwindigkeit, auf die Sekunde berechnet, ist nur ein kleiner Bruchteil eines Zentimeters, es handelt sich also um eine Zahl, die nicht nur keine Nullen, sondern gar mehrere Nullen im Nenner des Bruches hat, durch den sie dargestellt wird, die Nullenzahl ist sozusagen negativ, und deshalb gehen die Ordinaten in der Figur unterhalb der Nullbasis noch weiter und werden hier negativ Im übrigen spricht die Zeichnung für sich selbst; nur sei bemerkt, daß die Zahlen naturgemäß meist nur Mittelwerte sind.

Den Kurven, die immer steiler ansteigen, stehen andere gegenüber, die ihren Anstieg allmählich verlangsamen; und zwar gibt es da eine ganze Anzahl von Funktionen, z. B. die Quadratwurzel, oder die Kubikwurzel, den Logarithmus usw. Es muß genügen, hier einen solchen Fall zu betrachten, und zwar soll er aus einem besonders interessanten Gebiete entnommen werden: aus der Psychologie. Wenn auf eines unserer Sinnesorgane ein äußerer Reiz ausgeübt wird, so stellt sich eine Empfindung ein; und diese Empfindung ist desto stärker, je stärker der Reiz ist; es fragt sich nur, nach welchem Gesetze beide mit einander verknüpft sind. Es könnte ja sein, daß dem doppelten Reize auch die doppelte Empfindung dem zehnfachen Reize die zehnfache Empfindung entspricht,

Fig. 30.

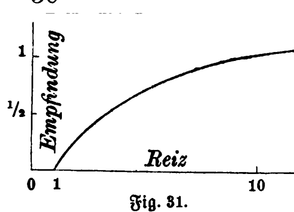


Fig. 31.

man würde dann, wie in Fig. 28, eine gerade Linie erhalten. Das ist aber nicht der Fall. Untersuchungen, die allerdings mit erheblichen Schwierigkeiten zu kämpfen hatten und auch erst auf einem gewissen Umwege zum Ziele gelangten, haben ergeben, daß die Empfindung zwar anfangs ziemlich rasch, dann aber allmählich immer langsamer an Intensität zunimmt, wenn der Reiz in immer gleicher Weise gesteigert wird; dem Mathematiker sei gesagt, daß es eine logarithmische Kurve ist. Sie steigt, wie man aus der Fig. 31 entnimmt, erst rasch, dann immer langsamer an. Und das ist eine sehr weise Einrichtung der Natur; denn die Reize, die uns die Außenwelt bietet, haben so kolossale Kontraste, daß wir sie aller Wahrscheinlichkeit nach nicht ohne dauernden Schaden ungeschwächt in unsere Empfindung aufnehmen könnten. Die Sinne und besonders das Zentralorgan übernimmt demgemäß eine angemessene Abstumpfung, und man kann nicht sagen, daß diese Abstumpfung uns um irgendeinen Genuß brächte; denn die Kontraste bleiben immer noch groß genug. Die Kurve zeigt übrigens, entsprechend der Natur des Logarithmus, noch eine andere Eigenheit: sie fängt nicht schon im Nullpunkte an, sondern erst an einer bestimmten Stelle der Abszissenachse; d. h. in die gewöhnliche Sprache übersetzt: nicht jeder Reiz löst eine Empfindung aus, der Reiz muß vielmehr eine bestimmte Mindeststärke haben, um überhaupt empfunden zu werden. Man nennt das den Schwellenwert der Empfindung, das ganze Gesetz aber bezeichnet man als das psychophysische Grundgesetz; es hat sich nicht auf allen Sinnesgebieten durchaus bewährt, spielt aber doch als Grundstein der ganzen Lehre auch jetzt noch eine hervorragende Rolle.

Bisher haben wir Beispiele ansteigender Kurven betrachtet, wir wollen jetzt zu absteigenden übergehen und beginnen mit dem Falle, daß die Kurve ganz gleichförmig abfällt, also eine nach rechts unten verlaufende Gerade ist. Nehmen wir einen Akkumulator und schließen wir seine Pole durch einen Kupferdraht von geeigneter Länge und Dicke; es fließt dann durch den Draht ein elektrischer Strom, und durch diesen Strom wird die Spannungsdifferenz zwischen den Polen des Akkumulators fortwährend ausgeglichen, um freilich immer wieder aus der inneren Energie des Akkumulators ersetzt zu werden. Am Anfang des Drahtes ist die Spannung am größten, in der Mitte ist sie null, am Ende ist sie ebenso groß wie am Anfange, aber negativ; dazwischen ist

der Verlauf völlig gleichförmig, man erhält also das Bild der Fig. 32; Abszisse ist der in eine gerade Linie auseinandergerollte Draht, Ordinaten sind die Spannungen an seinen einzelnen Stellen; die ganze Spannungsdifferenz beträgt, da es sich um einen einzigen Akkumulator als Stromquelle handelt, rund zwei Volt.

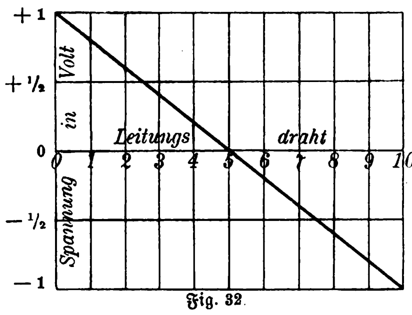
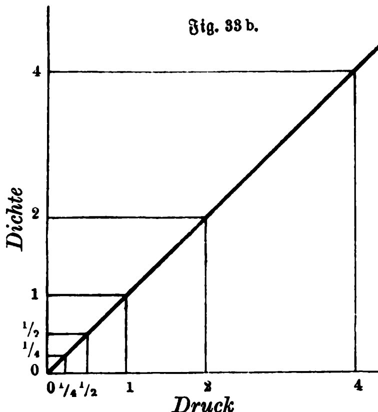


Fig. 32.

Übrigens ist dieser Fall auf allen Gebieten der Wissenschaft und Praxis nicht eben häufig; weit häufiger ist der Fall, wo der Abfall sich nach und nach verlangsamt, so daß die Abszissenachse, also der Nullwert, nur ganz allmählich erreicht wird. Die Abszissenachse ist dann also eine Tangente an die Kurven, und in vielen Fällen ist sie sogar eine Asymptote, d. h. die Kurve nähert sich ihr zwar mehr und mehr, ohne sie jedoch in der Endlichkeit je zu erreichen. Man wird das sofort an dem Beispiele eines Gases, z. B. der Luft, verstehen, von dem wir eine bestimmte Menge, etwa 1 g, in ein Gefäß einschließen und durch immer mehr gesteigerten Druck auf ein immer kleineres Volumen zusammenpressen. Der Druck soll die Variable, das Volumen die Funktion sein; jenen tragen wir auf der Abszissenachse, dieses auf der Ordinatenachse auf; es ergibt sich dann die Fig. 33 a, also eine allmählich immer sanfter abfallende und der Abszissenachse sich immer mehr nähernde, sie aber niemals erreichende Kurve (denn das Volumen kann doch nie völlig null werden). Auch ist es nicht schwer, das Gesetz dieser Kurve festzustellen; wenn man nämlich für irgendeinen Kurvenpunkt Abszisse und Ordinate mißt, und wenn man das für eine Reihe von Punkten wiederholt, so findet man, daß die Ordinate im umgekehrten Verhältnisse zur Abszisse steht, der doppelten Abszisse entspricht nur noch die halbe Ordinate, der dreifachen nur noch die gedrittelte usw.; oder auch: das Produkt aus Abszisse und Ordinate ist für alle Kurvenpunkte gleichgroß. Das geometrische Sinnbild des Produktes zweier Linien ist aber das aus ihnen gebildete Rechteck; in der Figur sind also alle Rechtecke: $0\frac{1}{4}a4 - 0\frac{1}{2}b2 - 01c1 - 02d\frac{1}{2} - 04e\frac{1}{4}$ an Flächengröße gleich. Eine solche Kurve nennt man

Fig. 33 a.

in der Geometrie eine gleichseitige Hyperbel. Aber noch auf eine andere, einfachere Art kann man feststellen, ob eine Kurve von diesem Charakter ist. Wenn nämlich das Volumen des Gases in umgekehrtem Verhältnisse zum Drucke steht, so muß seine Dichte, die doch nichts weiter ist, als das umgekehrt ausgedrückte Volumen, mit dem Drucke in direktem Verhältnisse stehen: dem doppelten Drucke muß die doppelte Dichte entsprechen usw. Stellt man also, wie in Fig. 33b, statt der Volumina die Dichten als Funktion des Druckes dar, so erhält man eine ansteigende Gerade, und das kann man mit einem Blicke feststellen.



Wenn wir nunmehr aufsteigende und absteigende Kurven kombinieren, so gelangen wir zu dem in der Natur und Praxis vielleicht verbreitetsten Falle der Kurven mit einem Gipfel und zwei Abhängen. In Fig. 20 haben wir bereits eine derartige Kurve kennen gelernt; wir wollen jetzt noch einige Beispiele hinzufügen, um daran wieder etwas Neues anzuknüpfen. Das erste Beispiel bezieht sich auf das Bild, das wir von einem leuchtenden Punkte, etwa von einem Sterne, im Beobachtungsinstrumente erhalten. Es ist, infolge einer gewissen optischen Erscheinung, der Beugung, nicht punktförmig, sondern ein kleines Scheibchen, und vom Mittelpunkte aus nimmt die Helligkeit nach dem Rande des Scheibchens allmählich ab; das Gesetz, nach dem das geschieht, ist in Fig. 34a durch die Kurve 1 dargestellt. Nehmen wir nun an, neben dem Sterne erscheine noch ein zweiter mit seinem Beugungsscheibchen, dann erhalten wir eine zweite, ganz entsprechende Helligkeitskurve 2. Und nun können drei Fälle eintreten: entweder die beiden Kurven liegen gänzlich außerhalb voneinander, wie die Figur das zeigt, dann ist nichts Besonderes zu sagen; oder sie greifen, wie in Fig. 34b, zu einem kleinen Teile übereinander, dann muß man in dem gemeinsamen Bereiche die beiderseitigen Ordinaten, die dem gleichen Abszissenpunkte entsprechen, addieren, (sozusagen übereinandertürmen), um die Gesamthelligkeit zu erhalten, und findet dadurch die Kurve 3, die, wie man sieht, einen Doppelgipfel hat; oder endlich die beiden Kurven greifen, wie in Fig. 34c,

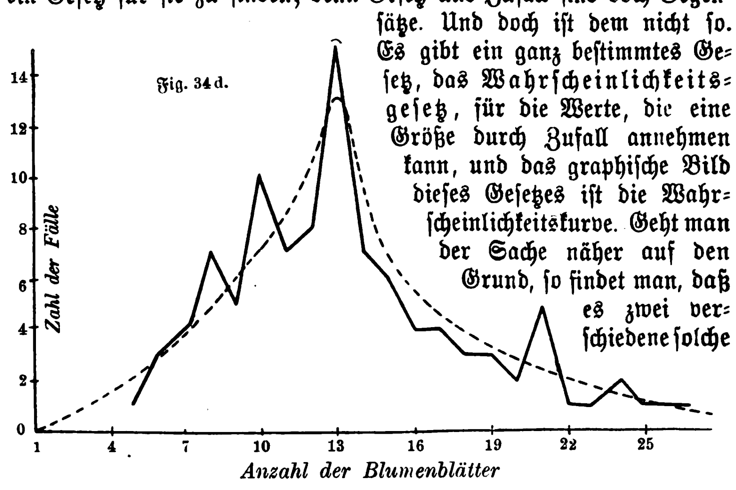
größtenteils übereinander, dann liefert die entsprechende Summierung der beiderseitigen Ordinaten die größte Erhebung weder an der Stelle des einen, noch an der des anderen Gipfels, sondern dazwischen, und es tritt wie im Falle eines einzigen Sternes eine eingipflige Kurve auf, die sich jedoch von dieser dadurch unterscheidet, daß ihr Gipfel eine andere Form hat (in diesem Falle eine breitere) und der ganze Kurvenverlauf andersartig ist. In den beiden ersten Fällen ist es leicht, die Existenz eines Doppelsternes nachzuweisen, im dritten erfordert das eine sehr genaue Ausmessung der Helligkeitsverhältnisse.

In wie merkwürdiger Weise sich analoge Verhältnisse auf den entferntesten Gebieten wiederholen, dafür können wir im Anschlusse an den soeben betrachteten Fall zwei weitere Erscheinungen anführen. Wenn man in einer bestimmten Gegend die Männer einer bestimmten Altersklasse auf ihre Körpergröße hin untersucht, so findet man einen am häufigsten vorkommenden Wert, weniger häufig kommen etwas größere oder kleinere Werte vor, noch seltener sind viel größere oder viel kleinere Werte, und die extremen Werte zu beiden Seiten sind äußerst selten. Trägt man nun die Körpergrößen, die vorkommen, auf der Abszissenachse ab und nimmt man als Ordinaten die unter 100 Männern vorkommenden Männer von der betreffenden Größe, so erhält man eine Kurve, ganz ähnlich der Kurve 1 in Fig. 34a. Wenigstens wird man das erwarten dürfen, und häufig wird diese Erwartung durch die Messung vollauf bestätigt. Zuweilen aber findet man eine zweigipfelige Kurve wie die Kurve 3 in Fig. 34b; was ist daraus zu schließen? Offenbar, daß die gewonnene Kurve sich aus zwei Einzelkurven gebildet hat, deren Gipfel an verschiedenen Stellen lagen; oder, auf das vorliegende Problem angewandt: daß unter den Männern zwei verschiedene Rassen oder Varietäten vertreten waren, die eine mit einer etwas größeren durchschnittlichen Körpergröße als die andere. Die graphische Statistik führt also hier zu sehr interessanten und intimen Schlüssen. Und das nicht bloß in der Anthropologie, sondern ganz allgemein in der Biologie, die damit zur Biometrie wird, d. h. zu einer Lehre von den quantitativen Verhältnissen in der organischen Welt. Die hier in Rede stehende Erscheinung, daß die einzelnen Individuen sich durch Schwankungen in der

Fig. 34a—c.

Größe bestimmter Eigenschaften unterscheiden, nennt man Variation und ihre graphische Darstellung „Variationskurve“. Derartige Kurven hat man für die verschiedensten Verhältnisse ermittelt, so für die Größe von Blüten und Früchten, für die Zahl der Blumenblätter, für die Eier und vieles andere. Dabei ergeben sich allerdings oft nicht unbeträchtliche Abweichungen vom idealen Charakter der Zufallskurve, und diese deuten eben darauf hin, daß hier nicht bloß der Zufall waltet, sondern daß gewisse innere Faktoren gesetzmäßig mitwirken. So kommen z. B. bei den Blüten der Kompositen gewisse Anzahlen von Blumenblättern lieber vor als andere, und deshalb wird die Kurve nicht selten von zackiger Gestalt, etwa wie die in Fig. 34d, wo zwar die Anzahl 13 am häufigsten vorkommt, nächstdem aber auch die Zahlen 8, 10 und 21 relativ begünstigt sind. Es ist hier nicht der Ort, den inneren Gründen dieser Erscheinung nachzugehen; es genügt festzustellen, daß sich hier ein reiches Feld für die graphische Forschung eröffnet hat.

Der zuletzt besprochene Fall enthält ein Problem von so allgemeiner Bedeutung in philosophischer und praktischer Hinsicht, daß wir darauf noch einmal zurückkommen und etwas näher darauf eingehen müssen. Es handelt sich um das Problem der Gesetzmäßigkeit im Zufall, also um die Frage, welche Werte eine Größe annimmt, die eigentlich immer gleich groß sein müßte, aber aus Gründen, die uns unbekannt oder doch nicht in ihrem inneren Zusammenhange erkennbar sind, in gewissen Grenzen hin und her schwankt. Man könnte meinen, daß, wenn diese Schwankungen zufällige sind, es dann ausgeschlossen sein muß, ein Gesetz für sie zu finden; denn Gesetz und Zufall sind doch Gegensätze. Und doch ist dem nicht so. Es gibt ein ganz bestimmtes Gesetz, das Wahrscheinlichkeitsgesetz, für die Werte, die eine Größe durch Zufall annehmen kann, und das graphische Bild dieses Gesetzes ist die Wahrscheinlichkeitskurve. Geht man der Sache näher auf den Grund, so findet man, daß es zwei verschiedene solche



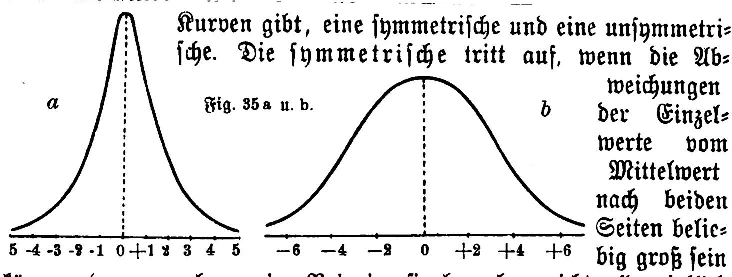


Fig. 35 a u. b.

Kurven gibt, eine symmetrische und eine unsymmetrische. Die **symmetrische** tritt auf, wenn die Abweichungen der Einzelwerte vom Mittelwert nach beiden Seiten beliebig groß sein können (wenn auch nur im Prinzip, sie brauchen nicht alle wirklich vorzukommen); sie hat eine Form, von der in Fig. 35 zwei Beispiele gegeben sind; eine mit höherem und schmälerem, die andere mit niedrigerem und breiterem Gipfel; und das bedeutet, daß die Schwankungen (die unter der Abszissenachse angegeben sind), dort im ganzen kleiner, hier größer sind. Stellt man z. B. Beobachtungen irgendeiner Größe an, und zwar das eine Mal mit einem rohen, das andere Mal mit einem feinen Instrumente, so werden die Schwankungen im ersten Falle größer sein als im letzteren. Oder, um einen Fall anzuführen, bei dem es sich um eine wirkliche Naturerscheinung handelt, aber um eine, die wir in ihrem Zusammenhange noch nicht erkannt haben und deshalb für zufällig halten: beobachten wir die Mittagstemperatur irgend eines Tages, etwa des 1. April, hundert Jahre lang, das eine Mal in Helgoland, das andere Mal in Breslau, so werden wir in beiden Fällen Schwankungen erhalten; aber sie werden in Helgoland geringer sein als in Breslau, entsprechend dem uniformierenden Einfluß des Meeres; es wird sich dort etwa die Kurve *a*, hier die Kurve *b* ergeben.

Sind dagegen den Abweichungen der Einzelwerte vom Mittelwert Grenzen gesteckt, und zwar nach unten andere als nach oben hin, so wird die Kurve **unsymmetrisch**. Das tritt insbesondere immer dann ein, wenn es sich um eine Größe handelt, die **ihrer Natur nach immer nur positiv sein kann**; nach unten hin bildet dann der Wert null den natürlichen Abschluß, nach oben hin können, wenn auch entsprechend selten, beliebig hohe Einzelwerte auftreten. Die Kurve nimmt alsdann die Gestalt der Fig. 36 an, sie fällt nach

Fig. 36.

links rasch und steil ab, nach rechts ganz allmählich und so, daß sie sich der Basis nur asymptotisch (vgl. oben) nähert. Unten sind hier zwei Zahlenreihen angegeben, nämlich erstens die wirklichen Werte, die, wie wir annehmen wollen, die betreffende Größe annimmt, und von denen der Wert 10 der am häufigsten vorkommende ist; und zweitens die positiven oder negativen Abweichungen von diesem „wahrscheinlichsten" Werte. Wie stark die Asymmetrie allmählich wird, ergibt sich daraus, daß zwar für plus oder minus $2\frac{1}{2}$ noch beide Ordinaten 7,4 Teile hoch sind, daß dagegen bei ± 5 die Ordinaten schon 4,8 bzw. 4,3, bei $\pm 7\frac{1}{2}$ schon 3,0 bzw. 1,1 und bei ± 10 die auf der rechten Seite immer noch 1,7 beträgt, während die links naturgemäß schon null geworden ist.

Das klassische Beispiel für diese Kurve gehört der atomistischen Theorie der Materie an, und zwar speziell der kinetischen Theorie der Gase. Nach dieser Theorie stellt man sich ein Gas vor als bestehend aus ungeheuer vielen winzigen Teilchen, die fortwährend regellos hin und her schwirren. Trotzdem zeigt sich, daß für ein bestimmtes Gas, z. B. für Luft, bei einer bestimmten Temperatur, z. B. 0° Celsius, die mittlere Geschwindigkeit der Teilchen einen ganz bestimmten Wert hat, nämlich 485 m in der Sekunde; und von diesem Mittelwert weichen die Geschwindigkeiten der einzelnen Teilchen nach dem Wahrscheinlichkeitsgesetze ab, das durch die obige Kurve veranschaulicht wird; sie heißt nach dem Urheber dieses Gesetzes Maxwellsche Kurve.

Hierher, d. h. unter die Herrschaft der unsymmetrischen Kurve, gehört nun auch die große Mehrzahl der Fälle, die in der Biometrie untersucht werden; denn auch hier handelt es sich um Größen, die nicht negativ werden können. Immerhin muß man zwischen Prinzip und faktischen Verhältnissen unterscheiden. Was z. B. die Körpergröße der Menschen betrifft, von der vorhin die Rede war, so sind hier die vorkommenden Abweichungen vom Mittel im ganzen nicht groß, auch die kleinsten Individuen bleiben noch weit von der Null entfernt, es kommt daher nur ein schmaler Streifen zu beiden Seiten des Kurvengipfels in Betracht, und in diesem macht sich, wie wir sahen, die Asymmetrie noch nicht oder doch nicht in erheblichem Maße geltend. Immerhin ist es unzulässig, in solchen Fällen kritiklos die symmetrische Kurve anzuwenden, weil man dadurch zu ganz falschen oder mindestens ungenauen Schlüssen geführt werden kann.

Fünftes Kapitel.

Zeitliche Änderungen. Chronographische Auflösung. Schwingungen verschiedener Art.

Wir wollen jetzt an ein früheres Beispiel, an das des Verkehrs auf einer Stadtbahn, anknüpfen, um durch Verallgemeinerung zu einem Problem zu gelangen, das durch seine Allgemeinheit und Wichtigkeit auf allen Gebieten der Naturwissenschaften, der Geschichte, der Volkswirtschaft und der Technik eine große Rolle spielt. Es handelt sich um die Veränderungen, die die Dinge im Laufe der Zeit erfahren; aus solchen Veränderungen setzt sich ja schließlich alles Weltgeschehen zusammen. Abszissenachse ist also hier, wie in dem gedachten Falle (und einigen anderen bereits vorgeführten), die Zeit, Ordinaten können je nach den Umständen sehr verschiedenartige Dinge sein: Ort, Raum, Geschwindigkeit, Temperatur, Bevölkerung und hunderterlei anderes. Man kann die graphische Methode hier speziell als zeitliche Auflösung oder „chronographische Auflösung“ bezeichnen, ein Ausdruck, der sofort einleuchten wird, wenn wir den einfachsten hierher gehörigen Fall ins Auge fassen. Wir wollen uns einen Massenpunkt in regelmäßiger Weise hin- und herschwingend denken, so daß er von seiner natürlichen Lage a in Fig. 37 erst nach b, dann zurück nach a, dann auf der anderen Seite nach b', schließlich zurück nach a schwingt und diese Bewegung fortwährend periodisch wiederholt. Aus der Figur ergibt sich nun sofort ein Charakteristikum dieser Bewegung: die Amplitude, d. h. die größte Abweichung des Punktes von seiner natürlichen Lage, gleichviel ob nach der einen Seite (ab) oder nach der anderen (ab') gemessen. Dagegen kann man die Periode oder Schwingungsdauer, d. h. die Zeit, die der Punkt braucht, um von a über b, a, b' zurück nach a zu gelangen, aus der Figur nicht erkennen; zu diesem Zwecke muß man vielmehr die chronographische Auflösung anwenden, d. h. man zeichnet die Bewegung des Punktes nicht auf ein ruhendes Papier auf, sondern auf ein Papier, das sich senkrecht zur Bewegungsrichtung des Punktes mit gleichförmiger Geschwindigkeit nach links fortbewegt. Solange der Punkt ruht, erhält man dann offenbar eine nach rechts fortschreitende horizontale Gerade; sobald er aber schwingt, wird daraus eine nach rechts fortschreitende Zackenlinie, etwa von der Form der Fig. 38; die Amplitude ist in allen drei Fällen die gleiche, dagegen ist, wie schon der direkte Anblick und des näheren der Vergleich mit den beigefügten Zeitmarken ergibt, die

b

a

b'

Fig. 37.

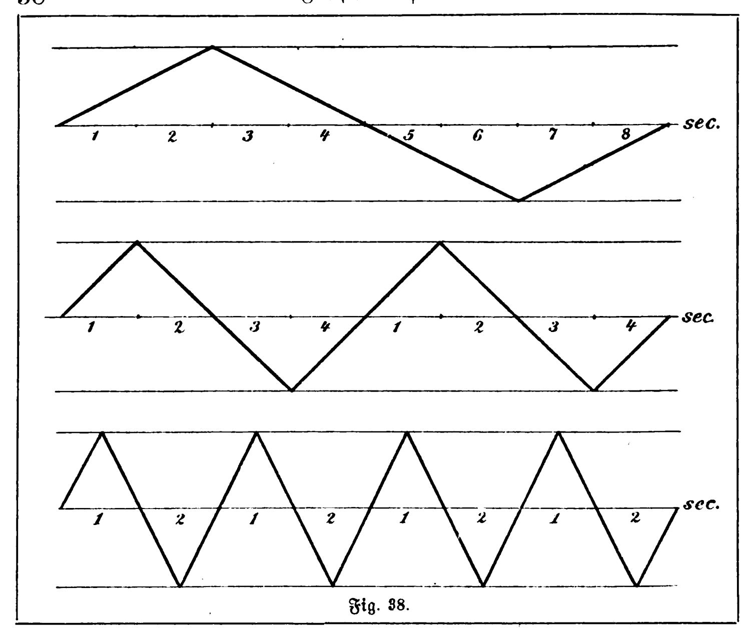


Fig. 38.

Schwingungsdauer verschieden, und zwar ist sie im zweiten Falle nur halb so groß wie im obersten und im untersten wiederum nur halb so groß wie im mittelsten. Zugleich aber zeigt es sich, daß noch eine weitere Mannigfaltigkeit besteht, nämlich die *Form der Kurve*. Sie ist hier aus geradlinigen Stücken zusammengesetzt; ist das aber auch nötig und was bedeutet es? Da das Papier gleichförmig nach links bewegt wird, der Punkt aber sich auf diesem Papiere anscheinend gleichförmig nach rechts oben bewegt, muß er sich in Wahrheit gleichförmig nach oben bewegen, bis er umkehrt; unsere Kurve stellt also die Schwingung eines Punktes dar, der sich mit *stets gleicher Geschwindigkeit* abwechselnd nach oben und unten bewegt; realisiert ist eine derartige Bewegung z. B. in gewissen Fällen der Schwingung einer mit dem Bogen gestrichenen Saite. Aber dieser Fall ist, wie schon aus der Art der Erregung hervorgeht, ziemlich kompliziert, und in einfachen Fällen muß sicherlich eine ganz andere Bewegung entstehen. Wenn man z. B. eine Saite zupft und sich selbst überläßt, wird sie natürlich immer schneller in die natürliche Lage zurückkehren, sich dann, infolge des Beharrungsvermögens aus dieser nach der anderen Seite, aber mit abnehmender Geschwindigkeit,

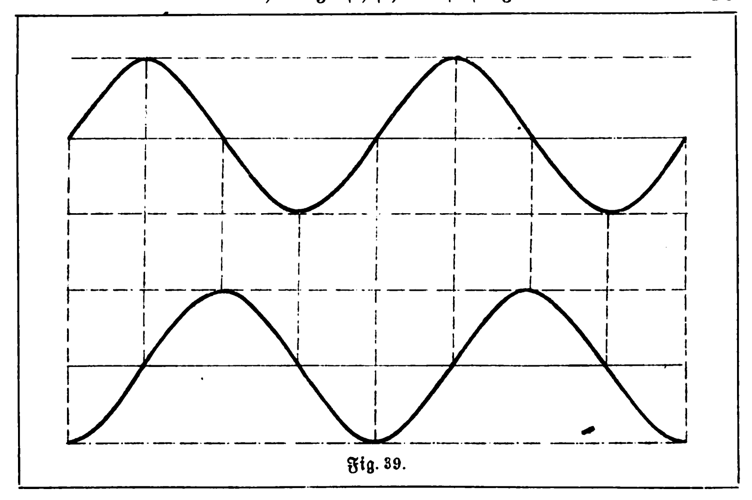


Fig. 39.

entfernen usw. Unsere Kurve muß daher am steilsten (denn die Steilheit veranschaulicht die Geschwindigkeit) in der Mitte sein, nach oben und unten muß sie an Steilheit abnehmen, und in den Umkehrpunkten, wo der Punkt momentan stillsteht, muß die Kurve auf einem, wenn auch unendlich kurzen Stücke, horizontal laufen. Eine derartige Kurve, wie sie in Fig. 39 dargestellt ist, bezeichnet man, weil die bezügliche Funktion, die die Ordinate von der Abszisse ist, ein Sinus ist, als Sinuskurve. Und nun noch ein letztes: die beiden Kurven dieser Figur sind, obgleich sie dieselbe Amplitude, dieselbe Periode und dieselbe Form haben, doch noch verschieden, sie haben nämlich verschiedene Lage: da, wo die obere einen Gipfel hat, befindet sich die untere noch im Niveau der Basis; und wo die untere einen Gipfel hat, ist die obere schon wie mitten im Abstieg. Man sagt: die beiden Schwingungen haben eine Phasendifferenz, sie sind zeitlich gegeneinander verschoben, etwa deshalb, weil der eine Punkt etwas später zu schwingen angefangen hat als der andere.

Die gerade Zackenlinie und die Sinuslinie sind übrigens nur zwei von zahlreichen möglichen Formen, die, je nach dem Geschwindigkeitsgesetz des Punktes, auftreten können. Dabei hat sich ein so merkwürdiger und für viele Probleme entscheidender Zusammenhang herausgestellt, daß mit einigen Worten darauf eingegangen werden muß. Die großen Mathematiker an der Wende des 18. und 19. Jahrhunderts haben nämlich bewiesen, daß man aus Sinuswellen von Perioden, die sich wie die natürlichen Zahlen verhalten, und von geeignet gewählten Amplituden

durch Aufeinandertürmung (wie wir das schon aus den Figuren 34b und c kennen) **jede beliebige Kurve gewinnen kann**, z. B. die gerade Zackenlinie oder eine Kurve mit zwei Gipfeln von gleicher oder verschiedener Höhe usw., eine Mannigfaltigkeit von Formen, die gar keine Grenzen hat. Ein Beispiel einer derartigen **Superposition** gibt Fig. 40: hier sind vier Sinuswellen, deren Perioden sich wie 1:2:3:4 und deren Amplituden sich ebenso verhalten, aufeinandergetürmt und liefern die stark ausgezogene Kurve, die, wie man sieht, steil ansteigt, aber dann in sanften Wellen abfällt. Das Geschwindigkeitsgesetz, also graphisch gesprochen die Wellenform, steht in engstem Zusammenhange mit den interessantesten Erscheinungen in der Natur, z. B. mit dem Klange der Töne; und es wird sich weiter unten Gelegenheit finden, darauf noch zurückzukommen.

Fig. 40.

Wie man weiß, dauert eine schwingende Bewegung, wenn sie nicht fortwährend neu erregt wird, nicht beliebig lange an, sie nimmt vielmehr von Anfang an an Amplitude ab und erlischt allmählich. Man nennt eine solche Schwingung eine gedämpfte Schwingung, ihr graphisches Sinnbild ist in Fig. 41 wiedergegeben, und zwar für zwei Fälle: den einer schwachen und den einer starken Dämpfung.

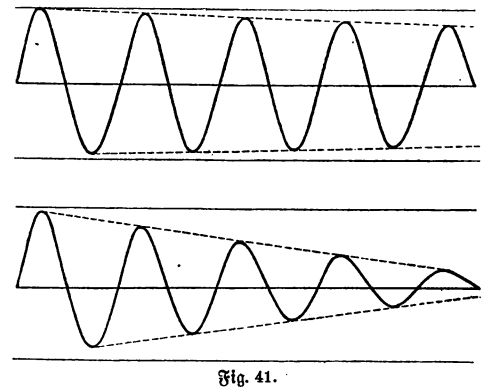


Fig. 41.

Die chronographische

Darstellung von Schwingungen findet Anwendung auf die langsamen Schwingungen des Wassers der Ozeane, die wir als Ebbe und Flut bezeichnen, auf die schon wesentlich rascheren der vom Winde erregten Wasserteilchen, auf die Schwingungen der festen Erdoberfläche bei den Erdbeben, auf die Schwingungen von Pendeln und auf die raschen Tonschwingungen fester und luftiger Körper. Aber damit ist das Gebiet durchaus noch nicht umgrenzt. In ganz analoger Weise findet die Methode nämlich auch Anwendung auf periodische Änderungen nicht direkt räumlicher Größen, also auf Erscheinungen, bei denen es sich gar nicht um Ortsänderungen handelt, und bei denen daher der Ausdruck „Schwingungen" nur noch bildliche oder symbolische Bedeutung hat. So der tägliche Gang der Temperatur im Laufe etwa eines Monats, eine Darstellung, die wie in Fig. 20 anfängt und sich dann, wenn auch nicht identisch, so doch in ähnlicher Weise dreißigmal wiederholt. Ferner die elektrischen Schwingungen, wie sie neuerdings sowohl in der Wechselstromtechnik als in der Funkentelegraphie von so großer Bedeutung geworden sind. Ferner die Schwankungen des Blutdrucks und viele andere physikalische, physiologische und verwandte Größen. Endlich, aus einem ganz anderen Gebiete, die periodischen Schwankungen der Preise von Waren, die mit der Jahreszeit oder sonstwie abwechselnd billiger und teurer werden; es muß aber hier an diesen kurzen Andeutungen, sowie an einem Hinweise auf später genügen.

Sechstes Kapitel.

Kurven mit Hin- und Rückweg. Geschlossene Kurven. Kurven mit Unstetigkeiten.

Wir kommen nun zu einer neuen Erweiterung unserer Methode, indem wir Phänomene betrachten, bei denen das graphische Bild zwar immer noch in einer Linie besteht, in einer Linie aber, die nicht in einseitigem Sinne verläuft, sondern umkehrt und zu dem Hinwege auch den Rückweg darbietet. Als Beispiel wollen wir eine sehr merkwürdige physikalische Erscheinung betrachten: die Magnetisierung eines weichen Eisenkörpers, den wir zu diesem Zwecke in ein sogenanntes magnetisches Feld bringen, d. h. in einen Raum, in dem eine magnetisierende Kraft von willkürlich herzustellender und zu variierender Stärke herrscht; und zwar soll es in bequemer Weise möglich sein, mit einem unmagnetischen Felde zu beginnen, es allmählich stärker und stärker werden und dann, wenn die gewünschte Maximalstärke erreicht

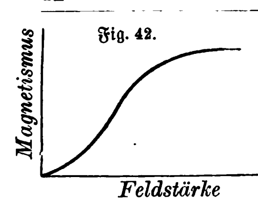


Fig. 42.

ist, ebenso wieder abnehmen zu lassen; es dann weiterhin umzukehren, so daß jetzt ein Feld von entgegengesetzter Richtung und wiederum wachsender Stärke entsteht, bis die entsprechende Maximalstärke erreicht ist; es dann wieder abnehmen zu lassen, und diesen Prozeß, der offenbar aus lauter Zyklen besteht, beliebig oft fortzusetzen. Es ist nun von vornherein einleuchtend, daß, je stärker das Feld ist, desto stärker auch der Magnetismus sein wird, den der Körper annimmt, und die nächstliegende Vermutung wäre die, daß beide Größen miteinander proportional wachsen und abnehmen; derart, daß, wenn man die Feldstärke als Abszisse, die Magnetisierung als Ordinate wählt, man eine vom Anfangspunkte aus nach rechts oben ansteigende gerade Linie erhielte, etwa wie in Fig. 19, wo die Kreuzchen die einzelnen, naturgemäß etwas ungenau ausgefallenen Beobachtungen wären und die Linie das von den zufälligen Fehlern befreite Gesetz darstellen würde. Indessen zeigt sich, daß diese Vermutung in unserem Falle nicht richtig ist, daß die wirkliche Kurve in zweifacher Hinsicht nicht unerheblich von der geraden Linie abweicht. Erstens steigt sie, wie Fig. 42 zeigt, nach einem kurzen geraden Stücke, zunächst immer schneller an, so daß die Konkavität nach links oben gerichtet ist; und zweitens geht diese Beschleunigung des Anstieges weiterhin in eine Verlangsamung über, so daß die Kurve jetzt nach rechts unten konkav wird und zuletzt sogar in eine horizontale Gerade übergeht. Physikalisch gesprochen: der Magnetismus wächst anfangs wie die Feldstärke, dann schneller, dann langsamer und zuletzt gar nicht mehr, der Eisenkörper ist, wie man sagt, mit Magnetismus gesättigt, jede weitere Steigerung des Feldes bringt keine weitere Wirkung mehr auf ihn hervor. Hört man demgemäß jetzt auf, das Feld noch weiter zu verstärken und schwächt es im Gegenteil wieder ab, so zeigt die Messung des in dem Körper vorhandenen Magnetismus, daß dieser jetzt Werte annimmt, die mit den Werten auf dem Hinwege, auch bei gleichen Werten der Feldstärke, nicht übereinstimmen, daß also die rücklaufende Kurve mit der hinlaufenden nicht übereinstimmt; sie liegt vielmehr, wie Fig. 43 zeigt, überall über jener, eine Erscheinung, die man als **magnetische Nachwirkung** oder **Hysteresis** bezeichnet. Die interessanteste, aber auch bekannteste Konsequenz ist die, daß, wenn das Feld wieder null geworden ist, der Körper trotzdem noch einen ge-

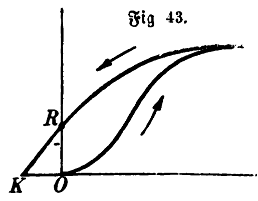


Fig 43.

wissen Magnetismus besitzt, der durch die Strecke OR dargestellt wird und remanenter Magnetismus heißt. Um ihn zu zerstören, muß man weiter gehen und ein entgegengesetztes Feld herstellen und zwar in hinreichender Stärke, um die Kraft zu überwinden, mit der der Körper seinen Magnetismus beizubehalten versucht und die man seine Koerzitivkraft nennt; sie wird durch die negative Abszisse OK veranschaulicht. Jetzt erst wird, bei weiterer Steigerung des negativen Feldes, der Magnetismus auch seinerseits negativ, erreicht sein negatives Maximum, und nun wiederholt sich das Spiel von vorhin, nur daß jetzt die zweite Kurve, die in diesem Falle die Hinkurve ist, nicht über, sondern unter der ersten liegt, und daß die Kurve jetzt nicht mehr oberhalb, sondern unterhalb des Nullpunktes durch die Nullpunktordinate hindurchgeht, um schließlich wieder einen, mit dem ersten nicht gerade zusammenfallenden äußersten Punkt zu erreichen. Man muß vielmehr, wie die Fig. 44 erkennen läßt, eine Anzahl von Zyklen durchmachen, bis sich die Verhältnisse konsolidieren, und dann stellt sich dauernd eine bestimmte geschlossene Kurve ein, die man Magnetisierungs- oder Hysteresisschleife nennt und die, je nach den Verhältnissen des Feldes und des Körpers, verschiedene Gestalten annimmt; eine der üblichsten ist in Fig. 45 wiedergegeben; die Kurve der Fig. 42 kommt hier gar nicht mehr vor, sie spielt nur bei der ersten Magnetisierung eine Rolle und

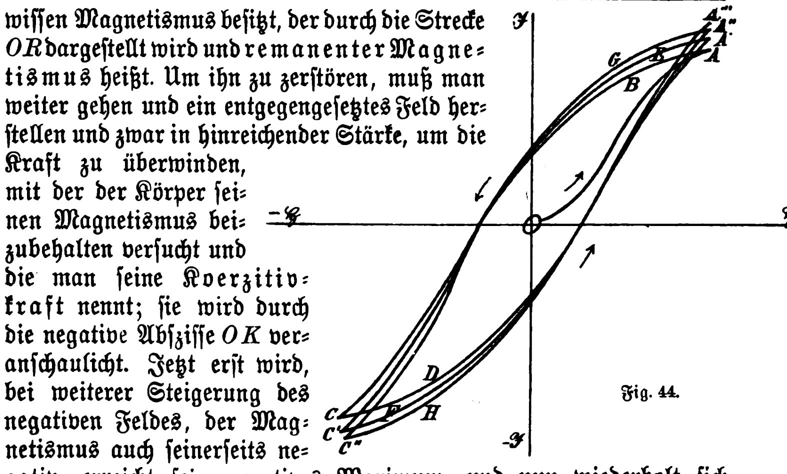


Fig. 44.

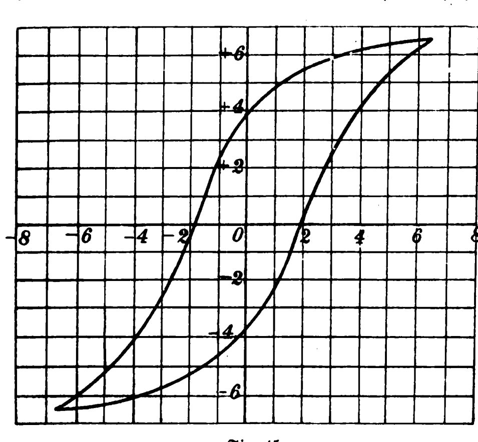


Fig. 45.

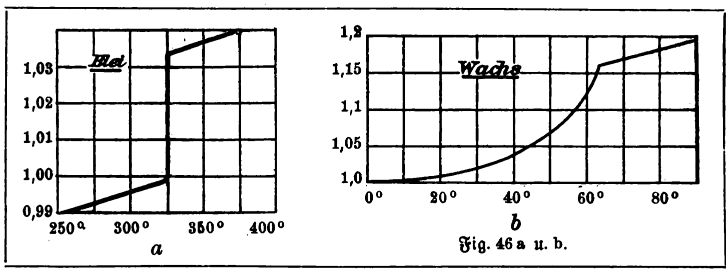


Fig. 46 a u. b.

heißt deshalb auch jungfräuliche Kurve. Auf die Hysteresisschleife werden wir bei einer späteren Gelegenheit noch einmal zurückzukommen Veranlassung haben.

Schließlich ist noch eine Klasse von Kurven zu erwähnen, die sich auf den ersten Blick als abnorm zu erkennen geben, wenn sich auch bei näherer Untersuchung diese Abnormität als im Wesen der Sache begründet erweist. Es sind Kurven, die an einer oder mehreren Stellen Unstetigkeiten aufweisen, d. h. plötzliche Richtungsänderungen, Knicke; und das, obwohl die Kurve in ihrem ganzen übrigen Verlauf stetig ist und auch nach Lage der Dinge sein muß. Als Beispiel diene die Volumenänderung der Körper bei Änderungen der Temperatur. Die Körper dehnen sich, wie man weiß, mit steigender Temperatur aus, ihr Volumen nimmt also zu, die Kurve geht also nach rechts oben. Wählen wir nun einen Stoff, der sich zunächst im festen Aggregatzustande befindet, und steigern wir die Temperatur so weit, daß er schmilzt, so tritt nun eine starke Ausdehnung ein, ohne daß während des Schmelzprozesses die Temperatur sich änderte; das Thermometer bleibt auf demselben Stande, bis die letzte Spur der Substanz flüssig geworden ist. Wir werden daher an dieser Stelle einen senkrechten Anstieg der Kurve zu erwarten haben. Dabei besteht ein interessanter Unterschied zwischen zwei Klassen von Stoffen: chemisch reinen und anderen. Als Beispiele mögen für jene Klasse das Blei, für diese das Wachs dienen; bei jenem findet bis hart an den Schmelzpunkt gleichförmige, bei diesem allmählich immer schnellere Ausdehnung statt; bei jenem findet dann plötzliche Schmelzausdehnung statt, die bei diesem fehlt; Blei hat eben einen engumschriebenen Schmelzpunkt, das aus verschiedenen Substanzen gemischte Wachs dagegen schmilzt sozusagen ganz allmählich; man vergleiche dazu die Fig. 46 a und b. In manchen Fällen kann die Entdeckung eines solchen unstetigen Kurvenverlaufes zu besonderen Schlüssen führen, die dann nachträglich auf direktem Wege bestätigt werden. So hat man gefunden, daß der Mag-

netismus des Eisens ganz langsam abnimmt, wenn man es erhitzt; aber bei 760° verschwindet er plötzlich fast vollständig, um dann bei 1280° wieder aufzutauchen; man hat daraus geschlossen und es später durch mikroskopische Untersuchung tatsächlich festgestellt, daß das Eisen bei diesen Temperaturen eine innere Umwandlung erfährt.

Siebentes Kapitel.

Vergleichung zweier oder mehrerer Kurven. Schlüsse daraus. Technisches zur Herstellung der Kurvenscharen. Symbolische Bilder. Beispiele aus Wissenschaft und Praxis. Größen, die von mehreren anderen abhängen.

Bisher haben wir Darstellungen untersucht, deren jede aus einer bestimmten Kurve bestand; und diese Kurve hatte für sich eine Bedeutung, die das Thema erschöpfte. Wir haben allerdings schon einige Male mehrere Kurven auf einem Bilde vereinigt, aber das waren entweder verschiedene Methoden, dieselbe Erscheinung zu versinnbildlichen, wie in den Fig. 23 bis 25 und 29; oder es wurden, wie in den Fig. 34 und 40, gewisse Kurven miteinander kombiniert, so daß ein Summenbild entstand. Jetzt aber wollen wir die graphische Darstellung in den Dienst einer vergleichenden Betrachtung stellen, sei es, daß es sich um dieselbe Eigenschaft in verschiedenen Fällen, oder um verschiedene Eigenschaften, oder um sonstige Beziehungen und Vergleichungen handelt. Nehmen wir zunächst den Fall, daß es sich um zwei verschiedene Merkmale eines und desselben Komplexes, z. B. eines Körpers, handelt, und wählen wir hierfür zwei Beispiele aus der Optik. Das eine betrifft die bekannten Jenaer Gläser, die durch ihre besonderen Eigenschaften sich für Beleuchtungskörper und optische Instrumente einen Weltruf erworben haben. Bei den älteren Gläsern entsprach der stärkeren Lichtbrechung immer auch eine größere Farbenzerstreuung, ein Parallelismus, der diese Gläser für feinere optische Zwecke unbrauchbar machte. Graphisch dargestellt nimmt er die Form an, daß, wenn man die Gläser nach ihrer Brechung ordnet, von der stärksten anfangend bis zur schwächsten, so daß man eine geknickte, aber überall absteigende Linie erhält, daß alsdann eine zweite Kurve, die die Farbenzerstreuung darstellt, ebenfalls aus lauter absteigenden Stücken besteht. Bei den Jenaer Gläsern ist dies nun, wie die Fig. 47a zeigt, nicht der Fall, die Farbenzerstreuung nimmt zwar auch hier im allgemeinen mit der Brechung ab, aber es gibt doch starke Ausnahmen, die

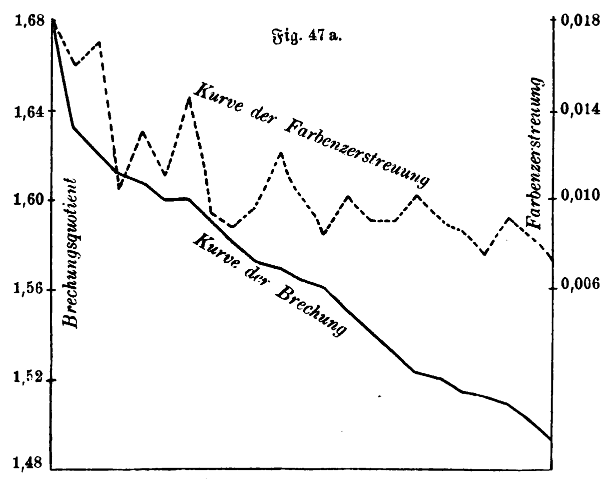


Fig. 47 a.

Kurve der Farbenzerstreuung ist vielfach nach oben geknickt. Die Namen und Nummern der einzelnen Gläser sind in der Figur nicht mit angegeben, da sie hier nicht speziell interessieren; es sei aber bemerkt, daß die Kurven links anfangen mit schwerem Borat-Flintglas und rechts aufhören mit Borosilikat-Kronglas (Fabriknummern S 10 und O 802). Diese ganze Erscheinung, die Beziehung zwischen Brechung und Farbenzerstreuung, kann man nun noch in anderer Weise graphisch darstellen, indem man nämlich, statt jede der beiden Größen in absteigender Folge der Glassorten zu ordnen, die beiden Eigenschaften direkt in Funktionalbeziehung zueinander setzt. Man trägt also die Brechung auf der Abszissenachse, die Farbenzerstreuung oder Dispersion auf der Ordinatenachse auf und macht für jede Glassorte eine Marke an der Stelle der Papierebene, deren Abszisse und Ordinate die entsprechenden Werte haben. Man erhält dann das Bild der Fig. 47 b, in der die alten Glassorten durch volle Scheibchen, die Jenaer durch Ringe angedeutet sind; wie man sieht, liegen jene sämtlich mehr oder weniger nahe der Diagonale, d. h. Brechung und Zerstreuung gehen bei ihnen Hand in Hand; von den neueren Gläsern aber liegen einige weit abseits der Diagonale, und deshalb sind sie von besonderer Bedeutung für

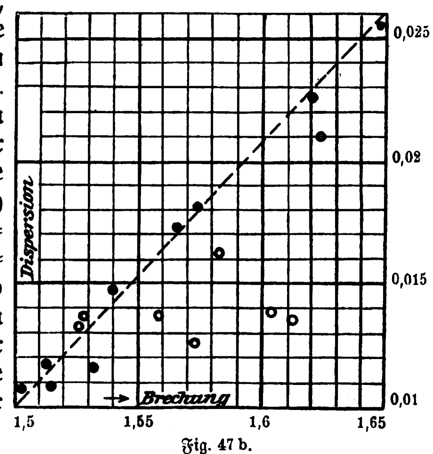


Fig. 47 b.

die Konstruktion verschiedener optischer Instrumente.

Der andere Fall aus der Optik betrifft die Kristalle, und zwar die einachsigen. In Fig. 48 stellt die ausgezogene Linie die Brechung verschiedener solcher Kristalle in absteigender Linie dar, und zwar für den ordentlichen Strahl, die gestrichelte Linie aber dasselbe für den außerordentlichen Strahl. Tritt nämlich Licht aus Luft in einen solchen Kristall ein, so findet nicht einfache, sondern Doppelbrechung statt, es entstehen zwei Strahlen, die verschieden gebrochen werden, und deshalb den Kristall in verschiedenen Richtungen durchlaufen. Wie man aus der Figur ersieht, findet dabei gar keine einfache Gesetzmäßigkeit statt, der außerordentliche Strahl wird bald stärker bald schwächer gebrochen (die gestrichelte Linie liegt bald über, bald unter der ausgezogenen), und die Differenz zwischen beiden Werten ist bei einigen Kristallen sehr klein, bei anderen sehr groß; ein Umstand, der sehr wichtig und deshalb durch Schraffierung des Raumes zwischen den beiden Kurven noch besonders hervorgehoben ist.

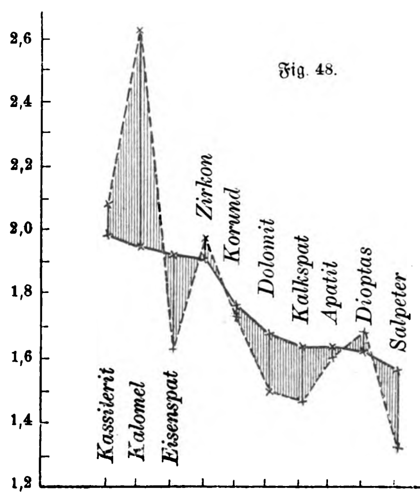


Fig. 48.

Nehmen wir endlich noch ein Beispiel aus der Technik: Die Beanspruchung eines städtischen Elektrizitätswerks in den verschiedenen Tagesstunden, und zwar einmal für Licht-, das andere Mal für Kraftzwecke; dabei sei etwa an eine mittlere Jahreszeit, April oder Oktober, gedacht. In Fig. 49 ist die Lichtkurve ausgezogen, die Kraftkurve gestrichelt, die Summenkurve,

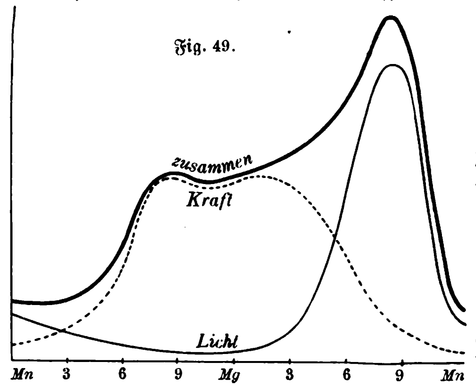


Fig. 49.

also die Gesamtbeanspruchung des Werkes stark ausgezogen Die Lichtkurve ist in den Tagesstunden fast null und erreicht zwischen 8 und 9 Uhr ein steiles Maximum; die Kraftkurve ist in den Nachtstunden fast null und hat in den Tagesstunden ein breites, um die Mittagszeit sogar eingesatteltes Maximum. Je stärker die gewerbliche Tätigkeit der Stadt ist, desto mehr wird die Gesamtkurve ausgeglichen, es sei denn, daß ein erheblicher Teil der gewerblichen Tätigkeit während der Nacht fortgesetzt wird; so kann die Gesamtkurve sehr verschiedene Formen annehmen, von der Form mit stark ausgeprägtem Abendgipfel bis zu einer fast ausgeglichenen Horizontallinie. Bekanntlich wird ein solcher Ausgleich, wenn er nicht schon durch die Abnehmer von Licht und Kraft zustande kommt, im Werke selbst dadurch geschaffen, daß in den stillen Stunden durch die Maschine Akkumulatoren geladen und in den Stunden des höchsten Anspruchs verbraucht werden.

Ehe wir in der vergleichenden Betrachtung von Kurven fortfahren, müssen wir hier wieder eine äußerlich-technische Bemerkung einschalten. Wenn man zwei oder, wie wir bald tun werden, viele Kurven auf einem Bilde vereinigt, muß man dafür Sorge tragen, daß sich das Bild nicht verwirrt, daß die einzelnen Kurven leicht und sicher zu verfolgen sind, und daß sich jede von den anderen in ihrem charakteristischen Verlauf abhebt. Ohne weiteres ist das erfüllt, wenn die einzelnen Kurven voneinander isoliert sind; im anderen Falle läßt sich das durch gewisse Kunstgriffe erreichen. In der großen Mehrzahl der Fälle aber werden sich die Kurven schneiden, und es würde ein Chaos entstehen, dessen das Auge nicht Herr zu werden vermöchte, wenn man nicht besondere Hilfsmittel heranzöge. Das vorzüglichste dieser Mittel besteht zweifellos in der Anwendung verschiedener Farben, und man wird es überall da anwenden, wo es möglich ist, nämlich beim Zeichnen auf die Tafel des Vortragsraumes, wofür zurzeit ausgezeichnete und vielfarbige Kreiden zur Verfügung stehen, freilich mit insofern doch etwas beschränkter Auswahl, als manche auf der Tafel zu dunkel und matt wirken, um weithin wahrnehmbar zu sein, andere wiederum sich, namentlich bei künstlicher Beleuchtung, nicht genügend voneinander unterscheiden; weiß, gelb, orange, rot, grün und eventuell ein rötliches, also vom grün ganz abstechendes blau sind am meisten zu empfehlen. Ebenso kann man für Privatgebrauch auf Zeichen- oder Koordinatenpapier bunte Stifte oder farbige Tinten mit großem Nutzen verwenden. Dagegen wird der Vervielfältigung bunter graphischer Darstellungen zum Zwecke der Einfügung in Zeitschriften und Büchern in der großen Mehrzahl der Fälle der Kostenpunkt im Wege stehen, und man

muß sich dann mit schwarzen Linien behelfen, die man in verschiedener Weise differenziert, wie das schon in einem Teile der bisherigen Figuren geschehen ist Eine Auswahl derartiger Muster ist in Fig. 50 zusammengestellt: die schwach und stark ausgezogene Linie, die gestrichelte, die punktierte, die strich-punktierte mit einem, zwei oder mehr Punkten (von vier Punkten ab wird es aber schon schwer zu übersehen), die feine Wellenlinie, endlich die ausgezogene, aber mit Punkten oder Querstrichen ausgestattete Linie; weniger zu empfehlen sind die Doppellinie, die aus kleinen Ringen zusammengesetzte Linie und andere Varietäten.

Fig. 50.

Von den vielkurvigen Darstellungen bringen wir zunächst ein Beispiel aus der Mathematik, und zwar der elementaren, so daß es allgemeinverständlich sein wird. Wenn man ein Binom, d. h. die Summe zweier Zahlen, in eine Potenz erhebt, z. B. in die 1., 2., 3., ... 10. Potenz, so erhält man eine Reihe von Gliedern nach dem Schema:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, Koeffizienten der 3 Glieder: 1 — 2 — 1

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, Koeffizienten der 4 Glieder:

1 — 3 — 3 — 1,

und so geht das fort; man nennt das die Binomialkoeffizienten. Bei der 10. Potenz lauten sie z. B.:

1 — 10 — 45 — 120 — 210 — 252 — 210 — 120 — 45 — 10 — 1.

Diese Binomialkoeffizienten, die bei vielen Aufgaben der Mathematik, der Naturwissenschaften und der Technik eine große Rolle spielen, sind nun in Fig. 51 a graphisch dargestellt, und zwar für die Potenzen 4 bis 10; die einzelnen Punkte sind nicht geradlinig miteinander verbunden, sondern im ganzen zu möglichst stetig verlaufenden Kurven vereinigt.

Ein zweites Beispiel sei eines von ganz allgemeinem Charakter, von schematischer und dabei symbolischer Bedeutung: es handle sich um die verschiedenen Typen geradliniger Bewegung, die ein Massenpunkt ausführen kann. Abszisse ist also die Zeit, als Ordinate kann man entweder den Ort wählen, den der Punkt in dem betreffenden Zeitpunkte

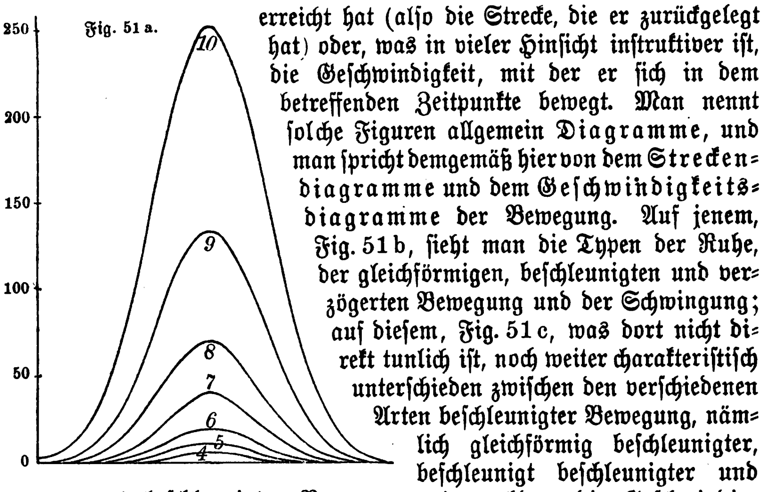


Fig. 51 a.

erreicht hat (also die Strecke, die er zurückgelegt hat) oder, was in vieler Hinsicht instruktiver ist, die Geschwindigkeit, mit der er sich in dem betreffenden Zeitpunkte bewegt. Man nennt solche Figuren allgemein **Diagramme**, und man spricht demgemäß hier von dem **Streckendiagramme** und dem **Geschwindigkeitsdiagramme** der Bewegung. Auf jenem, Fig. 51 b, sieht man die Typen der Ruhe, der gleichförmigen, beschleunigten und verzögerten Bewegung und der Schwingung; auf diesem, Fig. 51 c, was dort nicht direkt tunlich ist, noch weiter charakteristisch unterschieden zwischen den verschiedenen Arten beschleunigter Bewegung, nämlich gleichförmig beschleunigter, beschleunigt beschleunigter und verzögert beschleunigter Bewegung, je nachdem die Geschwindigkeit immer in gleichem Maße zunimmt oder allmählich schneller oder allmählich langsamer; und entsprechend die drei Arten verzögerter Bewegung. Dabei wurde das Hilfsmittel benutzt, die verschiedenen Kurven übereinanderzulegen, da doch der Ausgangspunkt für das hier Darzustellende gleichgültig ist; dadurch wird jede Verwirrung der Kurven vermieden, und das Bild bleibt übersichtlich.

Man kann die obige Betrachtung noch wesentlich verallgemeinern, wenn man von den Bewegungserscheinungen übergeht zu den Erscheinungen überhaupt, die uns der Kosmos, der physische wie der geistige, darbietet. **Solcher Erscheinungen gibt es verschiedene Typen**, und es ist fast immer möglich, einen wirklichen Vorgang entweder genau oder doch annähernd in einen dieser Typen einzuordnen. Unter diesen Typen sind zunächst vier von großer

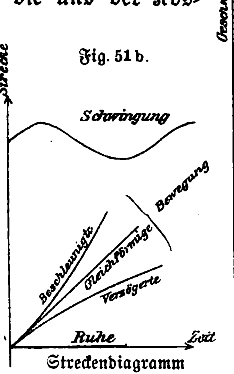


Fig. 51 b.
Streckendiagramm

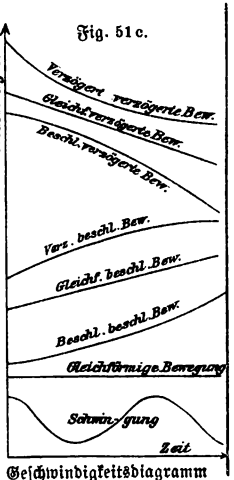


Fig. 51 c.
Geschwindigkeitsdiagramm

Einfachheit hervorzuheben, weil sie in unzähligen Fällen realisiert sind und sich derart ergänzen, daß sie zusammengenommen beinahe schon ein Bild des Weltgeschehens liefern. Das sind die vier Kurven der Fig. 52a. Die erste von ihnen bedeutet ein Phänomen, das aus nichts beginnt, zuerst langsam und dann allmählich immer schneller ansteigt; die zweite ein solches, das ebenfalls mit dem Nullwert einsetzt, aber anfangs rasch und allmählich immer langsamer ansteigt, um sich

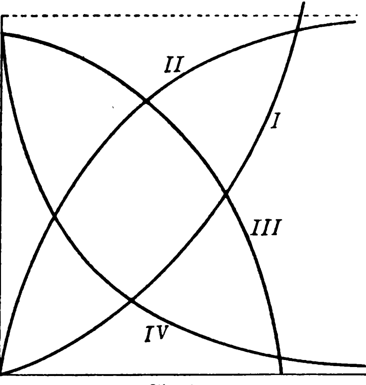


Fig. 52 a.

zuletzt einem konstanten Grenzwert zu nähern; die dritte einen Prozeß, der mit voller Größe einsetzt, zuerst langsam und dann immer rascher abnimmt; die vierte endlich einen solchen, der ebenfalls voll einsetzt, aber zuerst schnell und dann immer langsamer abnimmt, um sich schließlich einem konstanten Werte, z. B. dem Werte null zu nähern. Dabei gehören in gewissem Sinne die Kurven I und III zusammen, und ihrerseits die Kurven II und IV; jene nämlich verlieren sich ins Unendliche (I nach oben, II nach unten); und da es ein Unendliches für uns nicht gibt, so bricht der Prozeß irgendwo mit einer Katastrophe ab: mit einer Explosion, mit dem plötzlichen Tode, mit einem Kriege oder einer Revolution. Dagegen laufen die Prozesse II und IV in immer ruhigere Bahnen ein, sie erlöschen zuletzt aus Mangel an Kraft für die Fortsetzung. Das sind die normalen Geschehnisse in der Welt: das Stehenbleiben einer Kugel, die man ins Rollen gebracht hat, die oben betrachtete magnetische Sättigung, der Tod infolge Altersschwäche. Nur in einer Hinsicht ist das entworfene Bild wesentlich unvollständig: die Vorgänge nähern sich dem Endzustande häufig nicht einsinnig, sondern auf dem Umwege über Pendelungen und Schwingungen; aber das wäre schließlich doch nur ein Detail, das man in die Kurven einzeichnen müßte; und auch hier bleibt der wesentliche Gegensatz der zwischen pendelnden Prozessen, deren Amplitude immer größer wird, bis eine Katastrophe eintritt, und solchen, deren Amplitude immer geringer wird, bis praktisch der Ruhezustand eintritt (Fig. 52b und c). Als Beispiel für jene kann ein Träger, etwa eine Brücke dienen, die in so starke Schwingungen gerät (vielleicht durch ein im Rhythmus darüberziehendes Regiment), daß sie bricht; als Beispiele für diese, die normalen,

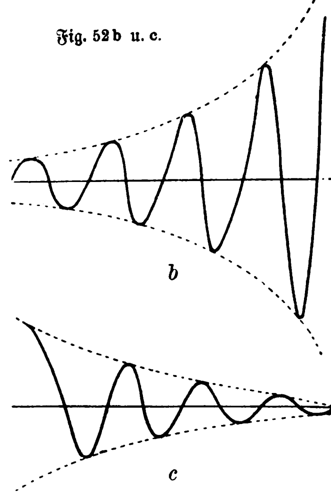


Fig. 52b u. c.

gedämpften Schwingungen (vgl. oben S. 40), die Schwingungen einer tönenden Stimmgabel oder die Schwankungen der Leidenschaften in der Jugend, die in den allgemeinen Gleichmut des Greisenalters einmünden.

Wir gehen jetzt zu einigen realen Fällen über und beginnen mit einem Falle aus der die weitesten Kreise angehenden Eisenbahnpraxis. Jedermann kennt und benutzt heutzutage die Kursbücher, in denen die verkehrenden Personenzüge verzeichnet sind. Natürlich spielt auch im inneren Dienste der Bahn das Kursbuch bzw. der Fahrplan der betreffenden Strecke eine gewisse Rolle, eine viel größere aber spielt sein anschaulicher Ersatz, der graphische Fahrplan. Er ist, entgegen dem Gebrauche in der Wissenschaft und sonstigen Technik, gewöhnlich so orientiert, daß die Strecken als Abszissen, die Zeiten als Ordinaten gewählt sind, so daß gewissermaßen die Zeit als Funktion des Ortes angesehen wird. Wir wollen das hier nicht akzeptieren; will man den Plan in der bahntechnischen Weise lesen, so muß man das Blatt um 90° drehen, es also von der Seite betrachten. Ein solcher Fahrplan enthält übrigens auch alle gemischten und Güterzüge, er enthält ferner noch eine Menge Angaben über die Art der Bahnhöfe, über die Abzweigungen, die Höhen- und Steigungsverhältnisse, den Bahntelegraphen, die Signale usw. Hier muß es genügen, in Fig. 53 (Zeiten von rechts nach links zu lesen) das Schema eines solchen graphischen Fahrplans in einfachen Verhältnissen wiederzugeben, und zwar nur für eine der beiden Fahrtrichtungen und mit Weglassung aller Güter- und Lokalzüge. Gewählt ist die Strecke Berlin—Jena—Nürnberg, die D-Züge sind stark, alle anderen schwach ausgezogen; jene verlaufen steiler, d. h. sie brauchen weniger Zeit als diese (von der Seite gesehen, erscheinen natürlich die D-Züge am wenigsten steil); ebenso zeichnet sich für alle Züge die Strecke Saalfeld—Lichtenfels (die den Thüringer Wald überquert), durch geringere Steilheit, also langsameres Fahren aus. Aufenthalte geben sich durch wagrechte Verbindungsstücke zu erkennen; für die Nachtzüge bricht die Linie links ab, um sich rechts an der durch die entsprechende Marke gekennzeichneten Stelle

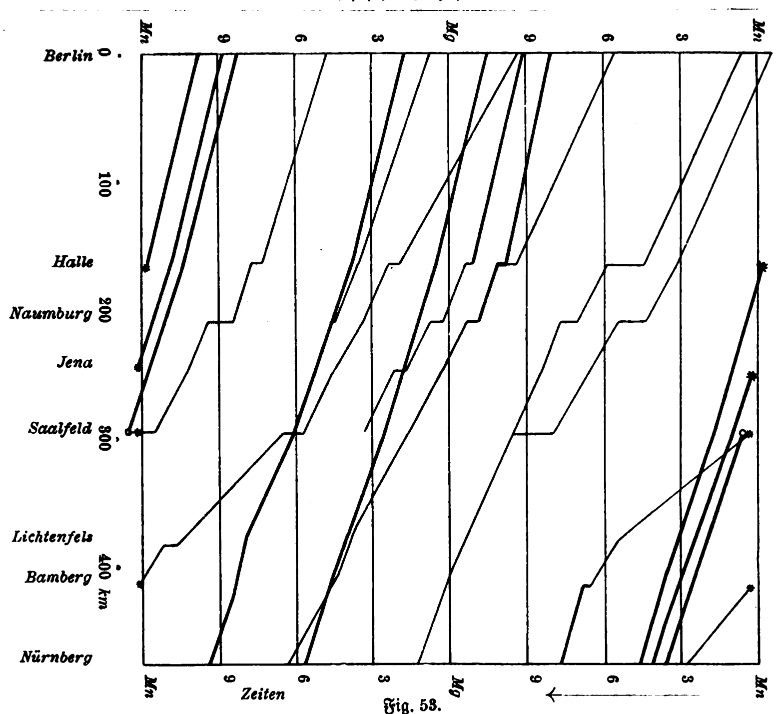


Fig. 53.

fortzusetzen. Man sieht deutlich, wo gewöhnliche Züge von D-Zügen überholt wurden; und bei Hinzufügung der Gegenzüge (die von rechts nach links fallende Linien darbieten würden) würde man ebenso die Kreuzungen sehen.

Nehmen wir jetzt ein Beispiel aus der Bevölkerungsstatistik und wählen wir die Entwicklung, die in den letzten Jahren die Einwohnerzahl des Deutschen Reiches genommen hat, und zwar getrennt nach fünf Wohnklassen, nämlich: große Orte (über 100 000 E.), mittlere (20 — 100 000), kleine (5 — 20 000), sehr kleine (2 — 5000) und ganz kleine (unter 2000 E.). Wir erhalten dann die fünf Kurven der Fig. 54 a, in der als Abszisse die Jahreszahl, als Ordinate die Einwohnerzahl in Millionen angegeben sind. Wie man sieht, steigt die Kurve der Großstädte allmählich immer steiler an, die der mittleren auch noch deutlich, die Kurve 3 nur noch wenig, und die Kurven 4 und 5 sind so ziemlich horizontal, ja die Kurve 5 hat sogar in den letzten Jahren eine

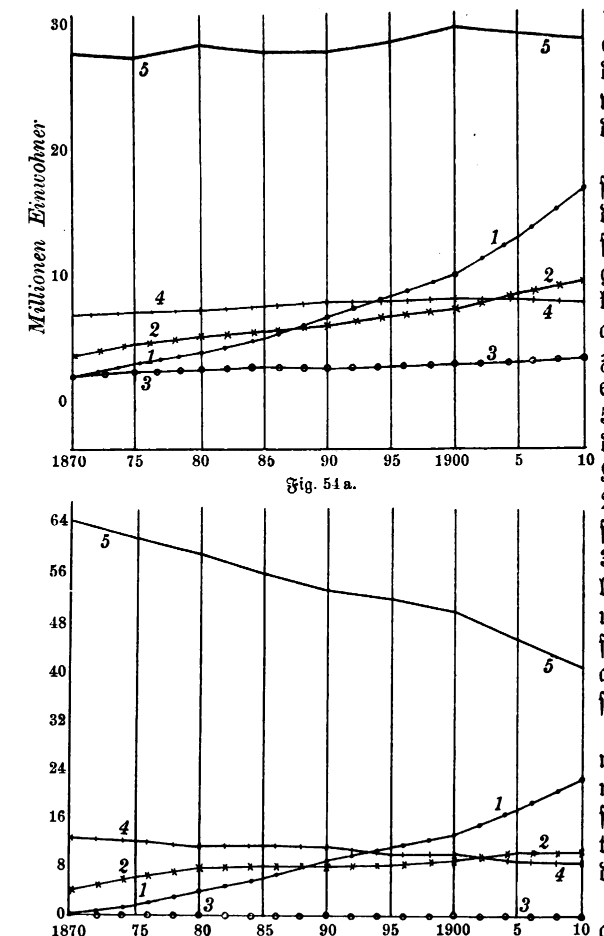


Fig. 54 a.

Fig. 54 b.

fallende Richtung angenommen. Noch deutlicher wird das, wenn man als Ordinaten nicht die Einwohnerzahlen, sondern den Anteil der fünf Wohnklassen an der jeweiligen Gesamtbevölkerung des Reiches, ausgedrückt in Prozenten, wählt; man erhält dann die Fig. 54b, und man sieht, daß jetzt nur noch die Kurve 1 wesentlich, 2 noch ein wenig ansteigt, daß dagegen 3 horizontal verläuft, 4 ein wenig und 5 ganz gewaltig fällt: der Prozentanteil der Großstädte an der Gesamtbevölkerung nimmt also stark zu, und zwar im wesentlichen auf Kosten der Bevölkerung des platten Landes.

Aus der Technik greifen wir ein sehr einfaches, aber besonders instruktives Beispiel heraus: die Durchbiegung horizontaler Stäbe, die mit dem einen Ende fest eingelassen, mit dem anderen frei sind, durch an dem freien Ende angreifende, vertikal nach unten wirkende Kräfte; die Kraft soll für alle Stäbe dieselbe sein, ihre Länge soll ebenfalls gleich sein, und ebenso die Größe des Querschnittes; das einzige, wodurch sie sich unterscheiden, soll die Form des Querschnittes sein. Dann zeigt die

Beobachtung, daß sie sich in sehr verschiedenem Grade durchbiegen, und zwar in der durch die Fig. 55 charakterisierten Weise. Die Form des Querschnittes und die Stärke der Durchbiegung, wobei die des quadratischen Stabes als Einheit gewählt ist, sind rechts beigefügt. Wie man sieht, wird der Stab mit einem auf der hohen Kante stehenden Rechteck als Querschnitt am wenigsten, der Stab mit einer liegenden Ellipse als Querschnitt am stärksten durchgebogen; dazwischen liegen die Fälle des Kreises, Quadrates, Kreuzes, Ringes usw.

Fig. 55.

0,5 — 0,52 — 0,6 — 0,63 — 0,85 — 0,87 — 1 — 1,05 — 1,48 — 1,88 — 2,0 — 2,1

Eine ungeheure Rolle spielen Darstellungen der in Rede stehenden Art in der Physik und Chemie, und es treten dabei außerordentlich mannigfaltige Kombinationen und Scharen von Kurven auf. Da kann es sich handeln um Funktionen der Zeit, der Temperatur, des Druckes, der Molekularverhältnisse, der Atomzahlen in der Molekel und um vieles andere. Es muß genügen, hier zunächst ein Beispiel herauszugreifen. Wird durch eine bestimmte erzeugende Kraft, z. B. eine Batterie von zehn Akkumulatoren, ein elektrischer Strom durch eine Leitung geschickt, so hängt die Stärke dieses Stromes außer von den Länge- und Querschnittsverhältnissen der Drähte ganz besonders von ihrem Material ab; eine Eigenschaft, die man den spezifischen elektrischen Widerstand der Stoffe nennt. Dieser Widerstand seinerseits hängt nun von der Temperatur ab; in welcher Weise, zeigt deutlicher als lange Zahlentabellen die Fig. 56. In ihr sind als Abszissen die Temperaturen von — 250 bis + 250 °C eingetragen, als Ordinaten Zahlen, die in irgendeinem hier gleichgültigen Maßstabe den spezifischen Leitungswiderstand angeben; die Metalle (denn um solche Stoffe handelt es sich hier) sind meist durch ihre chemischen Zeichen charakterisiert (Ni Nickel, Pb Blei, Tl Thallium, Sn Zinn, Fe Eisen usw.). Wie man sieht, nimmt der Widerstand mit wachsender Temperatur zu, und zwar bei den meisten Stoffen nach und nach immer schneller (die Kurven nehmen an Steilheit zu). Umgekehrt ausgedrückt: mit abnehmender Temperatur nimmt auch der Widerstand ab, und zwar, so verschieden er auch für die verschiedenen Stoffe sein mag (einige Kurven kommen von oben, andere aus der Mitte,

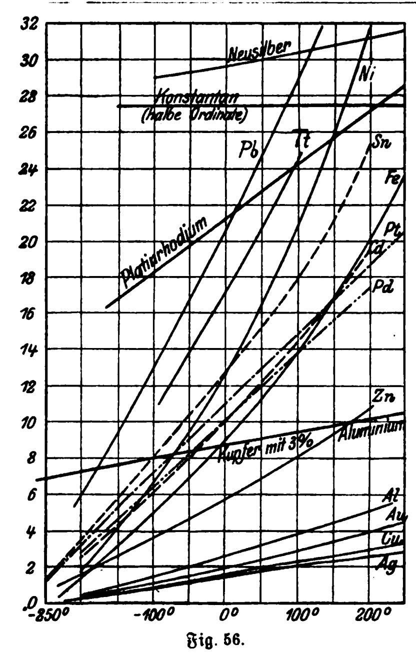


Fig. 56.

noch andere fangen schon ziemlich tief unten rechts an), in der Weise, daß alle Kurven einem gemeinsamen Zielpunkte links unten zustreben. Dieser Punkt liegt offenbar noch unterhalb $-250°$, und es ist, besonders mit Rücksicht auf theoretische Forderungen gewisser Art, mit Sicherheit anzunehmen, daß er bei $-273°$ C liege, bei dem sogenannten Nullpunkte der Temperatur, der freilich mehr ein Grenzbegriff als ein realer Zustand ist; bei ihm würden also alle Stoffe den elektrischen Strom widerstandslos durch sich hindurchgehen lassen. Übrigens fallen, wie man auf den ersten Blick sieht, einige Kurven aus dem Charakter der übrigen ganz heraus, indem sie viel weniger steil abfallen; und wenn man näher zusieht, so findet man, daß sie, im Gegensatz zu den reinen Metallen, die Legierungen betreffen (Neusilber, Bronze usw.); eine von ihnen, die Kurve für das Kostantan, ist sogar fast genau horizontal, der Widerstand dieses Stoffes, der zu diesem Zwecke hergestellt wird und davon seinen Namen erhalten hat, ist also von der Temperatur ganz unabhängig. Natürlich erhebt sich jetzt die Frage, wie sich denn diese anomalen Kurven nach links hin, bei immer tieferen Temperaturen verhalten, ob sie nicht auch zuletzt noch zum Nullpunkt konvergieren; aber das ist eine Frage, deren Verfolgung nicht hierher gehört.

In diesem und vielen anderen bisher betrachteten Fällen handelte es sich um eine Größe, die eine Funktion einer willkürlichen Variablen ist; im zuletzt untersuchten Falle war die Temperatur die Variable, der elektrische Widerstand die Funktion. Bei den meisten Naturerscheinungen handelt es sich aber um Größen, die nicht bloß von einer, sondern von mehreren Variablen abhängen und sich mit jeder von ihnen einzeln, im ganzen also schließlich in sehr verwickelter Weise ändern; es sind Funktionen mehrerer Variablen. Der nächstliegende Fall ist also offenbar der einer Funktion zweier Variablen. Hier wird die graphische Dar-

stellung begreiflicherweise viel schwieriger, und wir werden erst später die vollkommenste Methode dieser Darstellung kennen lernen. Vorläufig wollen wir uns mit einer Kompromiß-Methode begnügen, die aber, nach Lage der Dinge, fast immer benutzt wird und deshalb von großer Wichtigkeit für uns ist. Wenn eine Größe g eine Funktion zweier Variablen a und b ist — in Formel geschrieben: $g = f(a, b)$, so kann man, da man die Größen a und b willkürlich verändern kann und darf, zunächst fragen: wie ändert sich g, wenn a stetig verändert, dabei aber b dauernd auf dem gleichen Werte erhalten wird? Man erhält dann eine Kurve der bisher betrachteten Art, deren Abszissen die a, deren Ordinaten die g sind; nur muß man bei der Kurve anmerken, daß sie nur gilt, wenn eine gewisse dritte Größe b dauernd auf einem bestimmten Werte erhalten wird. Gibt man nun dem b einen anderen Wert, so bekommt man eine zweite, und so schließlich eine ganze Schar von Kurven zwischen a und g, denen die bezüglichen Werte von b beigeschrieben werden müssen. Vollstandig ist diese Darstellung freilich nicht, da man aus den Kurven zwar die Beziehung zwischen g und a für alle ihre Werte ablesen, für b aber doch immer nur einzelne Dauerwerte auswählen kann. Knüpfen wir z. B. an die Fig. 33 an, die die Beziehung zwischen Druck und Volumen eines Gases veranschaulicht. Nun ist aber auf das Volumen eines Gases außer dem Druck auch die Temperatur von Einfluß: die Kurve der Fig. 33 gilt also nur für eine bestimmte, während des ganzen Kompressionsprozesses dauernd erhaltene Temperatur, sagen wir einmal 250°. Führt man nun ganz entsprechende Versuchsreihen auch bei 400 und bei 600° durch, so erhält man zwei neue Kurven, im ganzen also eine Schar ähnlicher, aber verschieden gelegener

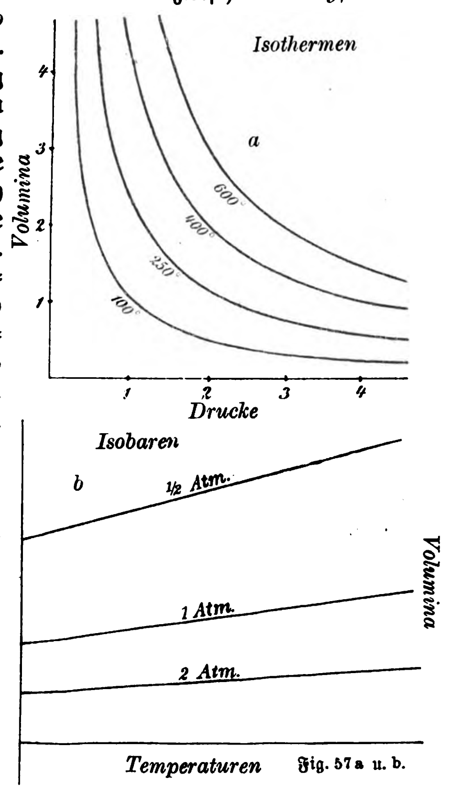


Fig. 57 a u. b.

Kurven, wie in Fig. 57 a. Nun kann man aber auch ganz anders verfahren und erhält dann das Bild der Fig. 57 b, die kein neues Phänomen, sondern nur das alte in anderer Gestalt veranschaulicht. Man kann nämlich bei einem bestimmten, während der ganzen Versuchsreihe festgehaltenen Drucke, etwa bei dem einer Atmosphäre, die Temperatur stetig steigern und zusehen, wie sich dabei das Volumen ändert; wie man weiß, nimmt es dabei zu, und zwar in völlig gleichförmiger Weise, so daß man eine gerade Linie erhält, die nach rechts ansteigt. Stellt man jetzt eine zweite Versuchsreihe an, etwa bei dauernd zwei Atmosphären Druck, und eine dritte, etwa bei einer halben Atmosphäre, so erhält man zwei neue geradlinige Kurven und schließlich wieder deren eine ganze Schar, alle in verschiedener Höhe verlaufend. In Fig. 57a ist die Beziehung zwischen Volumen und Druck vollständig, die zur Temperatur beschränkt sich auf einige ausgewählte von ihnen; in Fig. 57b ist es gerade umgekehrt. Man nennt die Kurven der Fig. 57a, weil sich jede von ihnen auf eine konstant erhaltene Temperatur bezieht, Isothermen und entsprechend die Kurven der Fig. 57b Linien gleichen Drucks oder Isobaren. Es sei bemerkt, daß man noch eine dritte Darstellung hinzufügen könnte, die dann Kurven gleichen Volumens oder Isochoren liefern würde.

Achtes Kapitel.

Isokurven, d. h. Kurven gleicher Werte. Landkarten und Felder. Skalare und Vektoren.

Damit sind wir nun unversehens zu einem Hauptthema graphischer Darstellung gelangt, zum Thema der „Isokurven", wie wir zunächst einmal kurz sagen können. Um das Abstrakte durch das Konkrete verständlich zu machen, wollen wir dabei mit einem Falle beginnen, der jedem geläufig und darum unmittelbar einleuchtend sein wird. Auf unseren Landkarten stellen wir Teile der Erdoberfläche dar mit allen ihren Einzelheiten wie Ländern und Meeren, Gebirgen und Flüssen, Wäldern und Feldern, Städten und Dörfern. Was wir aber nicht darstellen können, das ist die vertikale Erhebung aller dieser Dinge über das Meeresniveau; wir haben eben nur eine Horizontalprojektion, und die Gebirge können wir nur in irgendeiner indirekten Andeutung, durch Striche und beigefügte Namen, wiedergeben. Nun können wir uns allerdings damit helfen, daß wir, wie bei Hausplänen, dem Grundriß einen oder mehrere Aufrisse, d. h. Vertikalschnitte beigeben, z. B. einen von Süd nach Nord und einen von Ost nach West. Aber erstens sind das eben immer nur einzelne Schnitte, die doch kein Bild vom großen ganzen

des Gebirgsaufbaues geben; und zweitens muß man diese Vertikalschnitte fälschen, wenn sie Eindruck machen sollen; man muß den Höhenmaßstab gegenüber dem Horizontalmaßstab zehnfach, wenn nicht gar hundertfach wählen. Würde doch z. B. auf einem Erdglobus von 1 m Durchmesser der höchste Berg der Erde sich noch nicht um 1 mm über das allgemeine Niveau erheben! In dem in der Fig. 58 wiedergegebenen Vertikalschnitte durch Deutschland von der Zugspitze zur Ostsee ist sogar der Höhenmaßstab 200 mal so groß wie der Längenmaßstab; man erblickt hier sehr anschaulich die Gebirge einerseits als Erhöhungen, die Flußtäler anderseits als Einschnitte, außerdem aber den allmählichen Abfall von Süden nach Norden. Aber, wie gesagt, das sind nur Behelfe für bestimmte Zwecke, und es entsteht die Frage: wie kann man auf der Landkarte selbst die Höhenverhältnisse zur Darstellung bringen? Die Antwort lautet: durch Einzeichnung von Isokurven, und zwar in diesem Falle von Linien gleicher Höhe, also der Verbindungslinien aller Punkte, die die gleiche Höhe über dem Meeresspiegel haben. Offenbar ist es in jedem Punkte der Erdoberfläche, von gewissen, gleich zu erwähnenden Ausnahmen abgesehen, möglich, von ihm aus in zwei einander entgegengesetzten Richtungen horizontal weiter zu wandern. Denn wenn es in Fig. 59 von unserem Punkte p aus nach p_1 bergauf, nach p_2 bergab geht, so muß es, da man doch auch von p_1 mit nördlicher Umgehung von p nach p_2 gelangen kann, irgendwo auf diesem Wege, also etwa in p' einen Punkt geben, der mit p auf demselben Niveau liegt; und ebenso im Süden einen Punkt p''. Setzt man diesen gedanklichen Prozeß fort, indem man immer weiter nördlich und südlich ausweicht, so findet man, daß es eine durch p gehende Linie gibt, die in allen ihren Punkten dieselbe Meereshöhe besitzt, sagen wir einmal: 100 m. Ebenso wird durch p_1 eine solche Höhenlinie von 110 m, durch p_2 eine von 90 m gehen. Diese Linien heißen Niveau-

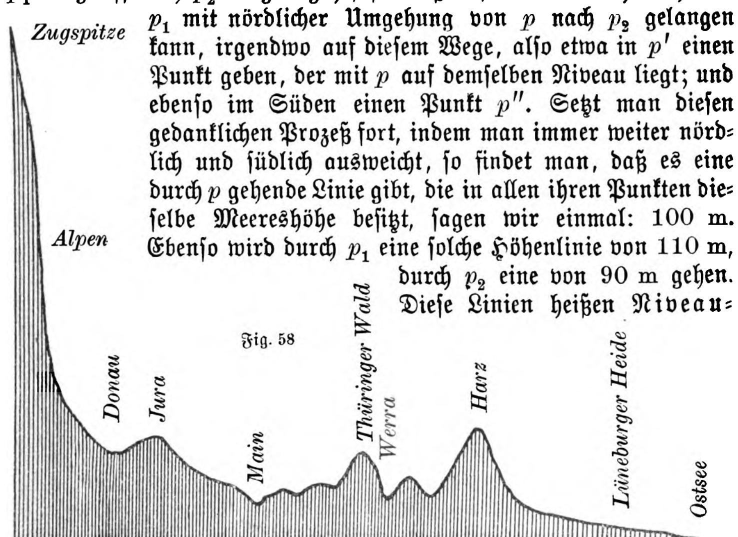


Fig. 58

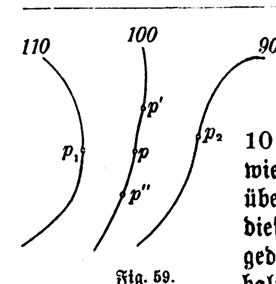


Fig. 59.

linien, Höhenlinien oder Isohypsen. Man zeichnet ihrer, je nach dem Maßstab der Karte und den betreffenden Bedürfnissen, von Meter zu Meter, oder von 10 zu 10 m, oder von 100 zu 100 m oder sonstwie ein, immer aber so, daß diese Differenz überall in der Karte zwischen je zwei Kurven dieselbe bleibt. Nun gibt es, wie schon angedeutet, besondere Punkte, die sich anomal verhalten, und zwar drei Arten: erstens die Gipfelpunkte, von denen aus man in keiner Richtung eben, sondern überall nur abwärts fortschreiten kann; zweitens die tiefsten Punkte von Kesseln (die deutsche Sprache hat kein Wort dafür, wir können sie aber Kesselpunkte nennen), von denen man ebenfalls nirgendshin eben, sondern überall nur aufwärts fortschreiten kann. Diese beiden Arten unterscheiden sich im Prinzip nicht voneinander, um sie herum laufen die Isohypsen wie Kreise oder Elipsen oder eiförmig, kurzum in geschlossenen Linien, die sich umschließen, wie das die Fig. 60 vor Augen führt; die beigefügten Zahlen beziehen sich auf den Fall des Gipfels, für den Kesselpunkt müßten sie nach außen hin, statt abzunehmen, zunehmen. Der Gipfelpunkt und der Kesselpunkt stellen gewissermaßen Isohypsen dar, die auf einen einzigen Punkt zusammengeschnürt sind. Die dritte Art von ausgezeichneten Punkten sind die Sattelpunkte oder Jochpunkte, deren charakteristische Eigenschaft gerade nach der entgegengesetzten Seite liegt: von ihnen aus kann man nämlich nicht bloß in zwei, sondern in vier Richtungen eben fortschreiten, wie das die Fig. 61 veranschaulicht. Nach Osten und Westen geht es bergauf (Kammrichtung), nach Norden und Süden geht es bergab (Nordtal und Südtal); folglich muß es dazwischen vier Richtungen geben, in denen es weder bergauf noch bergab, sondern eben vorwärts geht. Man kann sagen, daß sich in einem Sattelpunkte zwei Isohypsen (in der Figur die von Südwest nach Nordost

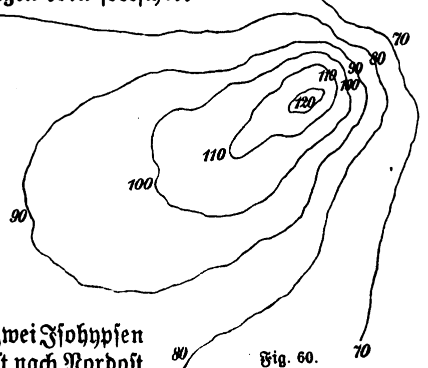


Fig. 60.

und die von Südost nach Nordwest laufende) schneiden; und diese beiden Linien müssen sich notwendig irgendwo zusammenschließen, um eine einzige, sich selbst schneidende Isohypse zu bilden. Man ersieht das sehr deutlich aus der Fig. 62, und man sieht ferner, daß innerhalb der Schleifen-Isohypse getrennte Isohypsen, jeden der beiden Gipfel für sich umschließend, liegen, außerhalb dagegen einheitliche für die beiden Gipfel zusammen.

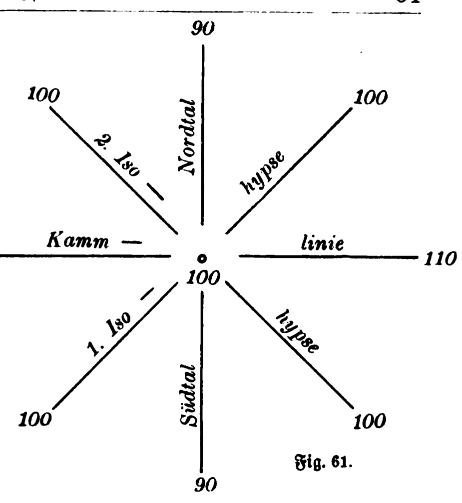


Fig. 61.

Hiermit ist aber das, was unsere Darstellungen lehren, noch lange nicht erschöpft. Betrachten wir nämlich die Fig. 62, so sehen wir, daß an der einen Stelle die Kurven dicht beieiander liegen, an einer anderen aber weit auseinander treten; was bedeutet das? Da die Höhendifferenz zwischen zwei Linien überall dieselbe ist, diese Differenz aber dort auf kurzer, hier erst auf langer Strecke erreicht wird, so folgt: Wo die Höhenlinien dicht gedrängt liegen, ist das Terrain steil ansteigend bzw. stark abschüssig; wo sie weit auseinander liegen, ist es nur sanft geneigt, und die Ebene selbst ist von Isohypsen ganz frei. Die Linien, die so verlaufen, daß sie überall auf den Isohypsen senkrecht stehen, also die Richtungen, in denen die Steigung bzw. das Gefälle am stärksten ist, heißen **Böschungslinien**; die Fig. 63 gibt von ihrem Verlaufe in einem besonderen Falle eine Vorstellung; die stark gezogene Isohypse bedeutet etwa ein Flußtal, links und rechts sind seine beiden Abhänge bis zu den betreffenden Kämmen oder Gipfeln, die Böschungslinien sind durch Pfeile gekennzeichnet.

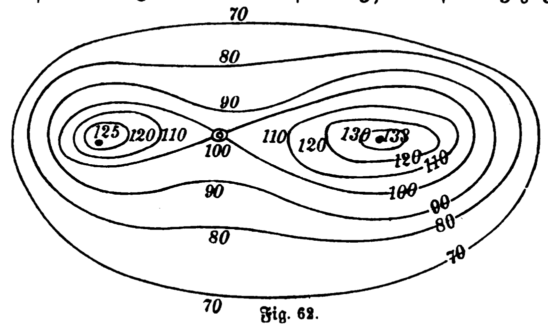


Fig. 62.

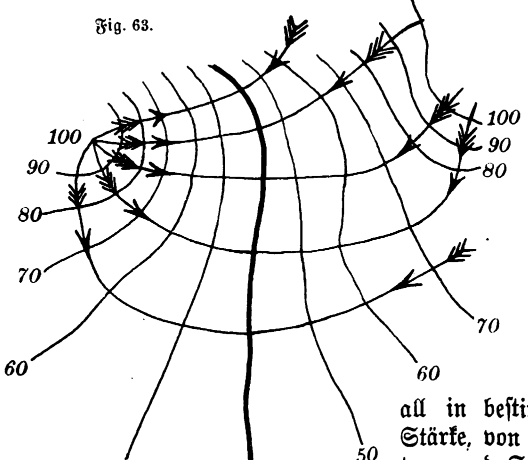


Fig. 63.

In ganz analoger Weise, wie in diesem Falle von dem konkreten Bau der Erdoberfläche, verschafft man sich nun in der abstrakten Naturwissenschaft Feldbilder, d. h. eine Art „Landkarten" von Räumen, in denen sich Naturerscheinungen abspielen, in denen, wie man sich ausdrückt, Kräfte tätig sind, überall in bestimmter Richtung und Stärke, von Ort zu Ort nach Richtung und Stärke variierend. Man spricht auch hier von Niveaulinien oder, wenn es sich um ein dreidimensionales Feld handelt, von Niveauflächen, also z. B. von Flächen gleicher Spannung, gleicher Temperatur, gleicher Lichtstärke usw.; und senkrecht zu ihnen verlaufen die den dortigen Böschungslinien entsprechenden Kraftlinien oder Wärmestromlinien oder Lichtlinien usw. Bei einem ersten Beispiel können wir noch an den konkreten Fall der Erdoberfläche anknüpfen, nur daß es sich jetzt nicht um das wirkliche Niveau und um die wirkliche Böschung handeln soll, sondern um etwas anderes: um den Luftdruck, gemessen durch das Barometer und um das Gefälle dieses Luftdrucks von einer Isobare zur anderen; in diesen Gefällelinien wird dann die Kraft wirken, die die Luft von einem Orte zum anderen treibt, es werden das also die überall herrschenden Windrichtungen sein (wenigstens in der einfachsten Theorie, in Wahrheit gestaltet sich die Sache aus gewissen Gründen komplizierter).

Um nun die Bedeutung dieser Darstellung gründlicher zu verstehen, müssen wir hier eine kleine Einschaltung machen. Man unterscheidet in der Wissenschaft zweierlei Arten von Größen: Skalare und Vektoren; ein Skalar ist durch eine Zahl vollständig charakterisiert, ein Vektor bedarf außerdem noch der Angabe einer Richtung. Ein Beispiel eines Skalars ist die Temperatur, ein Beispiel eines Vektors ist die Geschwindigkeit. Will man nun ein Feld durch einen Vektor charakterisieren, in unserem Falle also das Luftfeld, das die feste Erde umgibt, so muß

man für jeden Ort, den man in die Karte aufnimmt, eine Zahl angeben nebst einem Pfeil in bestimmter Richtung; gibt man dann noch dem Pfeil in irgendeinem Maßstabe eine der Windstärke entsprechende Länge, so hat man ein Bild des Feldes. Viel einfacher aber ist es, überall nur einen Skalar anzugeben, nämlich den Luftdruck (ausgedrückt in Zentimeter oder Millimeter Quecksilberhöhe im Barometer); denn hieraus folgt, wenigstens im Prinzip, Richtung und Stärke des Windes. Die Windrichtung steht überall auf der Isobare senkrecht, und die Windstärke ist desto größer, je dichter an dem betreffenden Orte die Isobaren beieinander liegen. In Wahrheit wird dieses Bild stark verändert durch verschiedene Umstände, ganz besonders durch die Achsendrehung der Erde; aber darauf kann hier nicht eingegangen werden. In Fig. 64a ist eine schematische Wetterkarte der geschilderten Art reproduziert, und

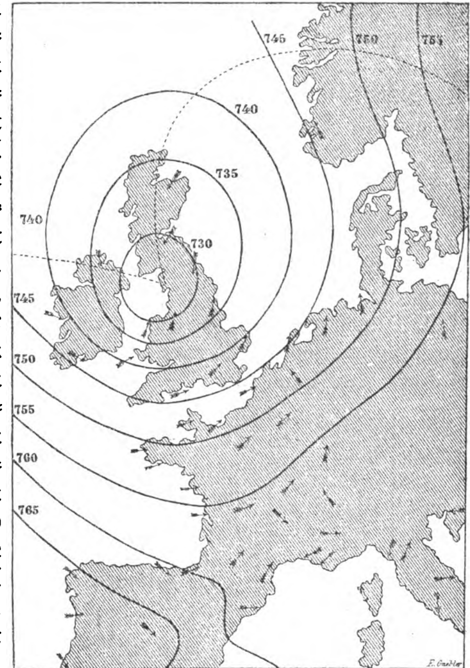


Fig. 64 a. Wirbelsturm vom 18. November 1864.

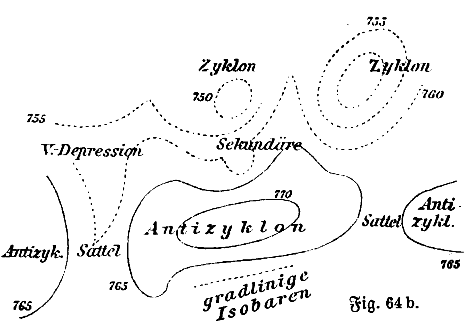


Fig. 64 b.

zwar der Fall eines arg gestörten atmosphärischen Gleichgewichts, wo sich über den Britischen Inseln ein Minimum des Luftdrucks befindet und um dieses herum die Isobaren zunächst annähernd kreisförmig ver-

laufen, während die Winde, die durch Fähnchen angedeutet sind, das Minimum spiralig umkreisen; also der typische Fall eines Wirbelsturms. Durch vergleichende Betrachtung solcher, auf eine Serie von Tagen bezüglicher Wetterkarten, bekommt man Aufschluß über die Windbahnen, die Wanderungen der Zyklone, den Ausgleich der Kontraste usw. Da gegenwärtig auch in den Tageszeitungen solche Karten wiedergegeben werden, ist jedermann Gelegenheit geboten, derartige Studien, sei es aus wissenschaftlichem Interesse, sei es zur praktischen Nutzanwendung, zu machen. Die Mannigfaltigkeit der Formen, die die Isobaren annehmen können, ist übrigens sehr groß, und zuweilen treten sie sogar alle gleichzeitig in unmittelbarer Nachbarschaft auf; so enthält die einem wirklichen Falle entnommene Karte 64b alle Haupttypen der Wetterbildung: geradlinige Isobaren, Depression, sekundäre Depression, Sattelpunkt, Zyklon, Antizyklon usw.

Wie es sich hier um Isobaren und Winde, so handelt es sich in anderen, ähnlichen Fällen um Isothermen, Isogonen (Linien gleicher magnetischer Abwärtsneigung, vgl. oben S. 13) und um vieles andere, was das Bild des Erdfeldes vervollständigt. Auch kann man die Methode in vielfachen Modifikationen anwenden und schematisieren. So hängt z. B. der Vegetationstypus einerseits von der geographischen Breite, anderseits von der Höhe über dem Meere ab, und es wird daher ein Gebiet gleichen Vegetationstypus geben, das am Äquator in den höchsten Gebirgsregionen, in der Polarzone aber im Meeresspiegel liegt, und entsprechend für

Höhenregion	*über Meter*
IX	*5000*
VIII	*4400*
VII	*3800*
VI	*3000*
V	*2500*
IV	*1900*
III	*1200*
II	*600*
I	*0*

Schnee- oder Kryptogamenregion
Alpenkräuter
Alpensträucher (Alpenrosen)
Nadelhölzer
Sommergrüne Laubhölzer
Immergrüne Laubhölzer
Myrten und Lorbeeren
Farne u. Feigen
Palmen Banane

Entsprechende Zonen	*äquatoriale*	*tropische*	*subtropische*	*wärm. gem.*	*kältere gem.*	*subarkt.*	*arktische*	*Polarzone*	*Zirkumpolarzone*
Breitenlage	*0–15*	*15–23*	*23–34*	*34–45*	*45–58*	*58–66*	*66–72*	*72–82*	*82–90*

Fig. 65.

die anderen Gebiete. Diesen Gedanken bringt die Fig. 65 in anschaulicher Form zum Ausdruck, indem sie schräg verlaufende Vegetationsstreifen nebeneinander stellt, die sich auf die Breitenlage als Abszissen und auf die Meereshöhen als Ordinaten beziehen.

In der Physik ist der typische hierher gehörige Fall der der sogenannten Fernkräfte: der Gravitation, der elektrischen und der magnetischen Kraft. Was oben der Gipfelpunkt war, das ist hier der Punkt, von dem die Wirkung, wie man sich vorstellt, ausgeht, also das, was man bei der Elektrizität und dem Magnetismus einen Pol nennt; allgemeiner kann man von „Quellen", nämlich Kraftquellen sprechen; man stellt sich eben vor, daß aus diesen Quellen die Kraft ausströmt, um sich im Felde zu verbreiten. Um eine punktförmige Quelle herum sind die Niveauflächen natürlich Kugeln, in allen Punkten einer und derselben Kugelfläche herrscht dieselbe elektrische Spannung, und die Radien sind die „Kraftlinien", d. h. sie geben in jedem ihrer Punkte die dortige Richtung der Kraft an. Um die Frage zu beantworten, welche Änderung denn die Kraft bei dieser Ausbreitung im Raume erfährt, braucht man nur zu bedenken, daß die von dem Pole ausgegangene Kraftstrahlung sich über immer größere Kugelflächen verteilt, daß also ihre Konzentration — und das ist doch die Kraftstärke — in eben demselben Maße abnimmt. Nun ist aber die Kugelfläche mit doppeltem Radius, also in doppeltem Abstand vom Pole, viermal, in dreifachem neunmal so groß geworden; folglich ist die Kraft dort nur noch ein viertel, hier nur noch ein neuntel so groß. Man erhält also das Elementargesetz aller hierher gehörigen Phänomene: Die Kraft nimmt ab in dem Maße, wie das Quadrat der Entfernung zunimmt. Die Fig 9, die seinerzeit für den Fall der Lichtstrahlung entworfen wurde, gilt also in ganz der gleichen Weise auch für Kraftstrahlung, überhaupt für die Ausbreitung eines Agens von einer punktförmigen Quelle aus; für andere Quellenformen gelten aber wiederum andere Gesetze.

Der Fall eines einzigen Poles ist sehr einfach, aber selten verwirklicht; schon bei zwei Polen wird das Bild erheblich verwickelter, besonders wenn sie von verschiedener Stärke sind. So sind z. B. in Fig. 66a auf Grund theoretischer Berechnung die Niveaulinien und Kraftlinien zweier gleich starker Quellen und in Fig. 66b die zweier Quellen wiedergegeben, deren „Ergiebigkeiten" sich wie 4:1 verhalten. Man sieht, daß zwar die nächste Umgebung jeder Quelle kreisförmig ausgebildet ist, daß aber dann schleifenähnliche und andere Niveaulinien auftreten, ganz analog denen um einen Sattelpunkt auf der Erdoberfläche (Fig 62). Und was die Kraftlinien angeht, so sieht man, daß sie zwar zunächst wie

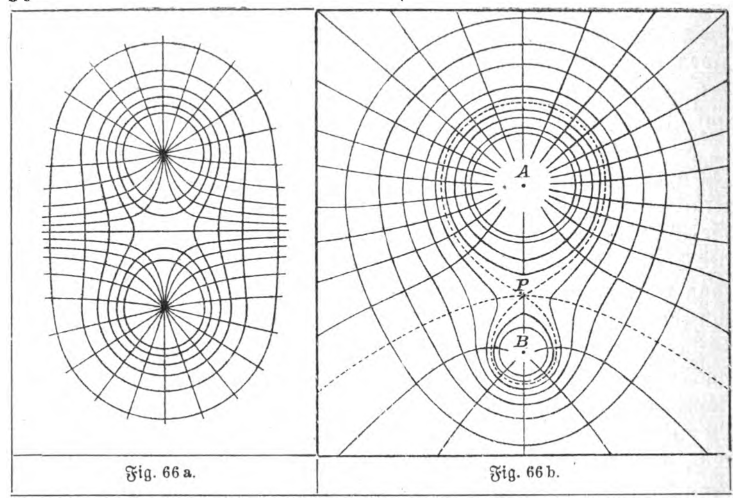


Fig. 66 a. Fig. 66 b.

die Radien eines Kreises von den Quellen ausgehen, und daß die nach außen gerichteten das auch weiterhin tun, daß aber die einander zugekehrten Kraftlinien so abbiegen, als ob sie einander abstießen. Handelte es sich nicht um zwei Quellen, sondern um eine Quelle und eine „Senke", d. h. eine Stelle, wo Kraft aufgesaugt wird, so würde man ganz entsprechend nicht Abstoßung, sondern Anziehung der beiderseitigen Kraftlinien konstatieren.

Wir werden übrigens später Gelegenheit haben, auf die Darstellung von Kraftfeldern noch einmal zurückzukommen, und alsdann wird das Problem erst sein volles Interesse gewinnen.

Neuntes Kapitel.

Polare Darstellung. Rosetten. Schnitte durch Körper.

Das gemeinsame aller bisherigen Darstellungen war das rechtwinklige Achsensystem, das wir ihnen zugrunde legten; ein Punkt in der Ebene wurde dabei durch seine „rechtwinkligen Koordinaten", durch seine Abszisse x und seine Ordinate y, gekennzeichnet. Das ist nun aber nicht die einzige Möglichkeit, die Orte in der Ebene zu fixieren, es gibt noch viele andere. Unter ihnen befindet sich eine, die sich gerade auch für die graphische Darstellung oft hervorragend eignet. Auch bei ihr gehen wir, gemäß der Fig. 67, von einem Anfangs- oder Nullpunkte A aus, auch

hier ziehen wir von ihm aus eine gerade Linie AB als Achse in beliebiger Richtung; nun aber verfahren wir ganz anders wie bisher: wir ziehen vom Nullpunkte einen zweiten Strahl OP, und zwar gerade nach dem gegebenen Punkte P, den wir fixieren wollen. Die Länge r dieses Strahles soll das eine Bestimmungsstück sein, man nennt sie seinen Radiusvektor. Um nun die

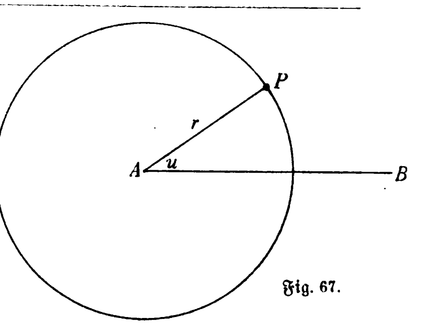


Fig. 67.

Lage des Punktes vollständig zu bestimmen, muß man bedenken, daß es unzählige Punkte mit dem Radiusvektor r gibt, nämlich alle, die auf derselben Kreislinie um den Nullpunkt liegen; unter ihnen ist der unserige dadurch charakterisiert, daß sein Radiusvektor mit der Grundachse einen bestimmten Winkel u bildet; durch Angabe von r und u ist also unser Punkt vollständig definiert. Man nennt r und u die Polarkoordinaten des Punktes und die entsprechende graphische Darstellung „polare" oder auch, wegen der entstehenden Form, eine „Rosette". Und nun wollen wir einige Fälle polarer Darstellung ins Auge fassen; man begreift, daß sie immer Größen vom Charakter eines Vektors betreffen; denn das sind ja eben Größen mit Richtungsmannigfaltigkeit.

Das erste Beispiel sei die Häufigkeit der verschiedenen Windrichtungen an einem bestimmten Orte, z. B. in einer mitteldeutschen Stadt. Dabei kann man sich darauf beschränken, acht Windrichtungen zu unterscheiden und findet dann, daß West am häufigsten vorkommt, nämlich an 63 Tagen, reiner Ostwind am seltensten (an 28 Tagen), alle übrigen Werte liegen zwischen diesen beiden; alle diese Zahlen natürlich aus langjährigen Beobachtungen durch Mittelwertbildung gewonnen. Diese Verhältnisse veranschaulicht die Fig. 68a in

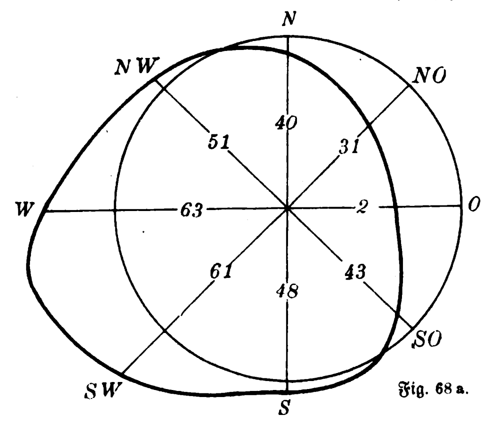


Fig. 68a.

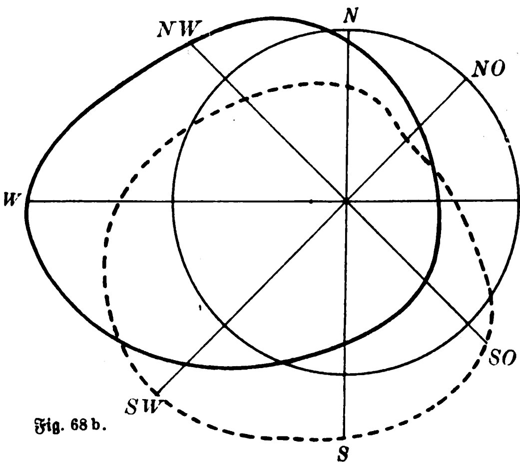


Fig. 68 b.

sehr greifbarer Weise: wären alle Windrichtungen gleich vertreten, so müßte man den schwach gezogenen Kreis erhalten, in Wahrheit erhält man die stark ausgezogene ovalähnliche Kurve; die Häufigkeitszahlen sind den einzelnen Strahlen beigefügt. Und um auch hier die vergleichende Darstellung zu bringen, diene die Fig. 68b, in der für dieselbe Gegend die Windverteilung wiedergegeben ist, aber nicht im Jahresdurchschnitt, sondern das eine Mal (gestrichelt) für den Januar, das andere Mal (ausgezogen) für den Juli; wie man sieht, weichen die beiden Kurven erheblich voneinander ab.

In der Technik wird die polare Darstellung sehr oft mit Nutzen angewandt, so bei der Darstellung der Lichtmenge, die eine Lichtquelle in die verschiedenen Raumrichtungen hinaussendet. Auf dem Papier kann man natürlich nur einen Schnitt angeben, und zwar ist meistens der Vertikalschnitt der wichtigste; ein solcher ist in Fig. 69 wiedergegeben, und zwar für eine elektrische Bogenlampe. Man sieht auf dieser Figur drei verschiedene Kurven, und diese haben folgende Bedeutung: die schwach ausgezogene gibt die Lichtverteilung ohne Anwendung einer Glasglocke, die gestrichelte gilt für klares Glas, die stark ausgezogene für Milchglas. Bei einer solchen Lampe macht sich also der Einfluß der einander in vertikaler Linie gegenüberstehenden Kohlenstifte stark geltend, aber das Milchglas bewirkt eine kräftige Ausgleichung der Gegensätze, es wird jetzt weniger nach den Seiten, dafür mehr als vorher nach unten gestrahlt (wenn auch immer noch weniger als nach den Seiten).

Fig. 69.

In der Physik und Mineralogie bietet das ausgedehnteste Feld polarer Darstellung die Welt der Kristalle dar, jener Körper, die sich in bezug auf alle möglichen Vorgänge verschieden verhalten je nach der Richtung, in der sich der Vorgang in ihrem Innern abspielt. So ist z. B. der Widerstand gegen elastische Zug- oder Drehkräfte stark von der Richtung abhängig, in der einen ist eine starke, in der anderen nur eine geringe Dehnung bzw. Drillung die Folge jener Beanspruchung. Man stellt das am besten fest, indem man sich aus dem Kristall mehrere verschieden gerichtete Stäbchen herausschneidet und diese dann dem Dehnungs- oder Drillungsversuche unterwirft. Während man also bei einem Glaskörper, wenn man seine Elastizität in den verschiedenen Richtungen durch eine räumliche Rosette darstellen will, eine Kugel erhält, findet man hier, je nach dem Charakter des Kristalles, ganz verschiedene Gebilde. Auf dem Papier kann man wiederum nur Schnitte durch dieses Raumgebilde zeichnen, und zwar wählt man dazu, weil diese maßgebend sind, die drei kristallographischen Hauptschnitte. In Fig. 70 sind für einen bestimmten Kristall, den Baryt, die *Werte des Dehnungs- und des Drillungsmoduls in den drei Hauptschnitten* in polarer Form gezeichnet; jede dieser sechs Rosetten hat eine andere Form, und diese Form bringt das gesamte Verhalten des Kristalles gegenüber elastischer Beanspruchung sehr schön zum Ausdruck.

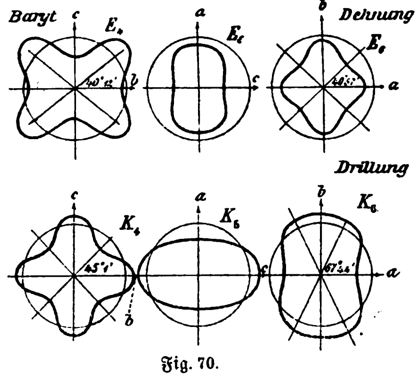


Fig. 70.

Zehntes Kapitel.

Punktverteilung in der Ebene. Flächendarstellung. Gliederung in der Fläche. Arbeitsdiagramm. Kombinierte Flächen. Flächensymbole. Darstellungen im Raume. Faden-, Draht-, Karton- und Gipsmodelle.

Wir kommen nun zu einem zweiten großen Hauptabschnitte unserer Betrachtungen, der aber nach Lage der Dinge sehr viel kürzer ausfallen wird. Die Elemente und die Gesamtheit der Darstellung sollen jetzt nicht

mehr Linien, sondern Flächen sein, und zwar aus äußeren, leicht ersichtlichen Gründen ebene Flächen. Dieser Abschnitt umfaßt im übrigen ganz verschiedene Methoden, die auch schon äußerlich wenig miteinander gemein haben.

Wir beginnen mit einem Falle, der als Übergang dienen kann, weil wir hier eigentlich weder Linien noch Flächen benutzen, sondern Punkte, aber freilich Punkte, die sich nach gewissen Gesetzen über die Ebene verteilen. Wenn es sich um die gleichzeitige Darstellung zweier Größen handelt, die irgend etwas Gemeinsames haben, z. B. verwandte Eigenschaften verschiedener Stoffe, so kann man diese Stoffe nach der Intensität der einen Eigenschaft ordnen und erhält dann für diese Eigenschaft eine fallende Kurve, für die andere aber eine bald fallende, bald steigende Kurve (vgl. Fig. 47a). In mancher Hinsicht aber erhält man ein viel anschaulicheres Bild, wenn man die eine Eigenschaft als Abszisse, die andere als Ordinate wählt und in dem Punkte, wo sich eine bestimmte Abszisse und eine bestimmte Ordinate treffen, ein Zeichen macht mit Angabe des Stoffes, auf den es sich bezieht. Jeder Stoff hat dann auf dieser „Landkarte" eine bestimmte „Lage", nur daß es sich nicht um geographische Länge und Breite, sondern eben um die Werte jener beiden Eigenschaften handelt. Ein Beispiel hierfür haben wir schon vorweggenommen: die Darstellung von Lichtbrechung und Farbenzerstreuung durch Glassorten in Fig. 47b. Das jetzige Beispiel entnehmen wir einem anderen Erscheinungsgebiete, dem Verhalten der Flüssigkeiten und Dämpfe. Wie man weiß, verdampft eine Flüssigkeit unter normalem Drucke bei einer bestimmten Temperatur, bei höherem Drucke aber erst später, bei geringerem schon früher; oder umgekehrt: einen Dampf kann man, je nach dem herrschenden Drucke, bei verschiedenen Temperaturen verflüssigen. Es hat sich aber herausgestellt, daß es eine Druckgrenze gibt, unterhalb deren (d. h. bei noch kleineren Drucken) man einen Dampf auf keine Weise verflüssigen kann, auch wenn man die Temperatur noch so sehr erniedrigt; und daß es eine Temperaturgrenze gibt, oberhalb deren man einen Dampf auch nicht durch noch so kräftige Drucksteigerung verflüssigen kann. Diese Grenzwerte nennt man den kritischen Druck bzw. die kritische Temperatur des Stoffes; sie sind kolossal verschieden, und es findet dabei im allgemeinen keine gesetzmäßige Beziehung zwischen ihnen statt, d. h. es kann Stoffe geben, deren kritische Temperatur sehr hoch und deren kritischer Druck entweder sehr gering oder ebenfalls sehr hoch ist. In Fig. 71 sind nun zahlreiche Stoffe an der zugehörigen Stelle eingezeichnet, und zwar ist der Druck (Skala unten in Atmosphären) Abszisse, die Temperatur Ordinate; da es hier

nicht auf den speziellen Inhalt der Figur ankommt, wird es genügen zu sagen, daß 4 den Äther, 8 das Benzol, 9 das Chlor, 17 die Kohlensäure, 18 die Luft, 23 den Sauerstoff und 30 den Stickstoff bedeutet; übrigens mußten einige Stoffe weggelassen werden, weil sie zu weit unten oder rechts liegen, z. B. der Wasserstoff.

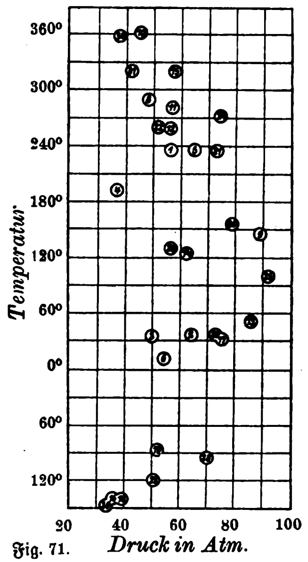


Fig. 71.

Sind es hier einzelne Punkte der Ebene, so ist es in anderen Fällen die ganze Ebene als solche mit ihren nach einem bestimmten Prinzipe gebildeten Teilflächen, um die es sich handelt. Wir fangen wieder mit einem der zahlreichen konkreten Fälle an, wo die Ebene die Erdoberfläche oder ein Teil von ihr ist, und wo die Aufgabe darin besteht, Eigenschaften gewisser Teilgebiete anschaulich kenntlich zu machen, also z. B. die schon in Fig. 62 gezeichneten Höhenschichten, wo es sich also jetzt nicht mehr um die Linien, die Isohypsen handelt, sondern um die zwischen ihnen liegenden ringförmigen Streifen, also um die Zonen von 70 bis 80, von 80 bis 90 m Höhenlage usw. Oder die Volksdichte einzelner Bezirke oder die Größe der Waldfläche oder die Säuglingssterblichkeit und hundert andere Dinge. Da diese Karten auch in den volkstümlichen Atlanten und Journalen sehr verbreitet sind, wird es genügen, hier ein Beispiel zu geben und einige allgemeine Bemerkungen daran zu knüpfen. Es soll sich um den *Anteil der industriellen Bevölkerung an der Gesamtbevölkerung in den Bezirken eines Landes* handeln; er ist für einen schematischen Fall in Fig. 72 dargestellt, und zwar in der Weise, daß die folgende Charakterisierung dem darunter stehenden Prozentanteil der industriellen Bevölkerung entspricht:

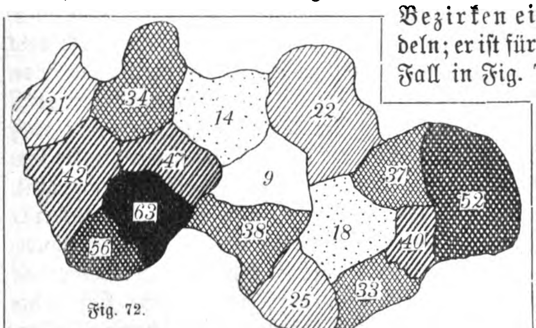


Fig. 72.

Man bekommt

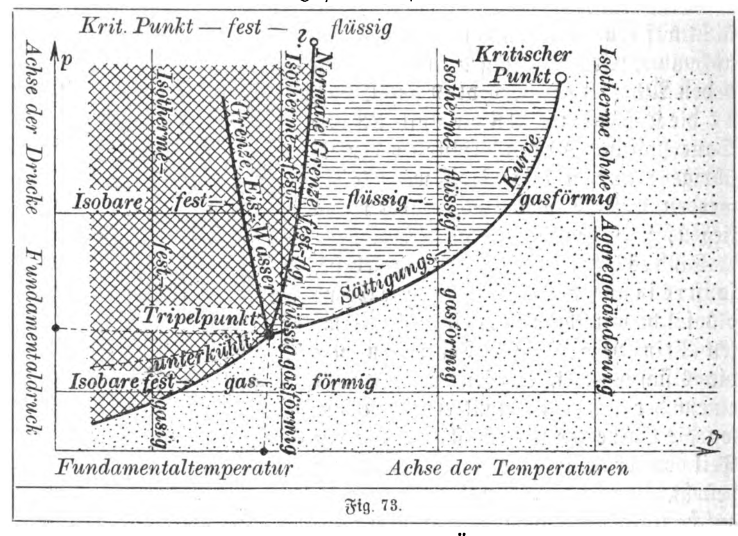


Fig. 73.

auf diese Weise sofort einen ausgezeichneten Überblick: je dunkler der betreffende Bezirk erscheint, desto industrieller ist er; eventuell kann man nun auch noch die wirklichen Prozentzahlen hineinschreiben, wie das hier geschehen ist. Wenn die Umstände es erlauben, kann man natürlich mit Vorteil auch Farben verwenden, muß dabei aber auf eine wirkliche anschauliche Abtönung Bedacht nehmen, etwa so, daß sie, wenigstens da, wo es sich um Gradunterschiede handelt, in einheitlicher Abstufung vom weiß über hell- und dunkelgelb zum orange, rot, rotbraun, braun und endlich zum schwarz fortschreitet; eine bunte Nebeneinanderstellung willkürlicher Farben, wie sie leider auch in neuesten Werken noch vielfach geübt wird, hat gar keinen Sinn, auch wenn diese Farben am Rande des Blattes erklärt werden; denn das kann doch nicht zu einer anschaulichen Betrachtung führen. Wo es tunlich ist, wird man ferner Farben nehmen, die dem Gegenstande gerecht werden, z. B. grün für Wiesen, gelb für Felder, braun für Wälder usw.

Die Idee der „Landkarte“ läßt sich nun auch auf das abstrakte Gebiet übertragen und findet dann Anwendung in den verschiedenen exakten Wissenschaften. Die Fig. 73 beispielsweise stellt eine **Landkarte des Wassers** dar, und es können auf ihr die verschiedenen Zustände, die dieser Stoff annehmen kann, sowie ihre Beziehungen zueinander unmittelbar abgelesen werden. Abszissen sind die Temperaturen, Ordinaten die Drucke, in dem punktierten Gebiete ist das Wasser gasförmig (Wasser-

dampf), in dem gestrichelten ist es flüssig, in dem gekreuzten fest (Eis), die Grenzlinien zwischen diesen Gebieten sind die Kurve des gesättigten Dampfes, die Schmelzkurve usw., ihr gemeinsamer Schnittpunkt, der sogenannte Tripelpunkt, bezeichnet den Zustand, d. h. die Werte der Temperatur und Druck, in dem Eis, Wasser und Dampf nebeneinander bestehen können, ohne daß Gefrieren oder Schmelzen, Verflüssigung oder Verdampfung eintritt. Es sei dem Leser überlassen, festzustellen, was sich noch alles aus der Karte entnehmen läßt.

Am wichtigsten aber ist die Fläche als der graphische Repräsentant einer Größe, die in der Technik schon seit altersher, in neuerer Zeit aber auch in der Wissenschaft eine entscheidende Rolle spielt: der Arbeit. Die mechanische Arbeit ist das Produkt aus der Kraft und der Strecke, durch sie einen Körper führt, und für andere Gebiete, z. B die der Elektrizität und des Magnetismus, kann man ganz entsprechende Produkte bilden: elektrische Arbeit als Produkt aus Spannung und Strommenge, magnetische Arbeit als Produkt aus magnetischer Kraft und erzeugtem Magnetismus usw. Wählt man also die konkrete oder symbolische Strecke als Abszisse, die Kraft als Ordinate, so wird die Arbeit im einfachsten Falle, nämlich in dem einer sich stets gleichbleibenden Kraft, dargestellt durch das aus beiden Größen gebildete Rechteck, das in der Fig. 74a schraffiert ist; denn die Fläche eines Rechtecks ist das Produkt aus der Länge seiner Seiten. Nun können zwei Rechtecke, bei sehr verschiedener Seitenlänge, denselben Flächeninhalt haben; und hiervon macht man im Falle der Arbeit Gebrauch, indem man eine bestimmte zu leistende Arbeit je nach den Umständen in verschiedener Weise herstellt. Handelt es sich z. B. um die Übertragung elektrischer Energie, so kann man entweder mit niedriger Spannung, aber großer Strommenge, arbeiten, Fig. 74b, oder mit hoher Spannung, aber geringer Strommenge,

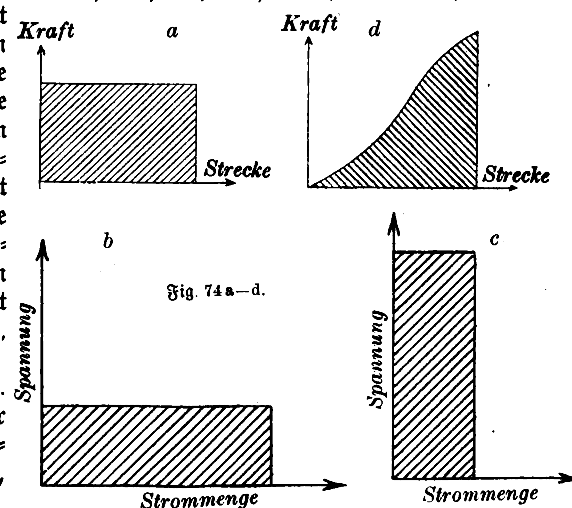


Fig. 74a—d.

Fig. 74c; wie man weiß, wählt man, besonders für große Entfernungen, das letztere, weil man auf diese Weise ökonomischer arbeitet.

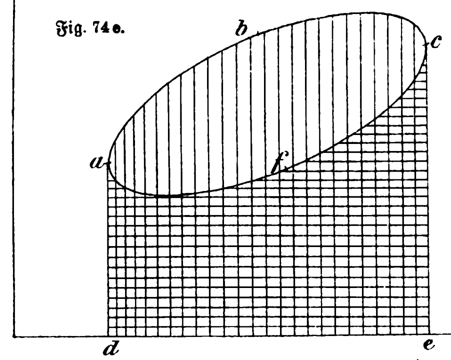
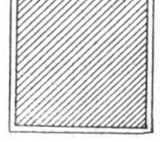


Fig. 74e.

Nimmt die Kraft, während der Prozeß sich abspielt, an Stärke zu, so erhält man eine nach rechts ansteigende Kraftkurve und folglich eine entsprechende Fläche, wie in Fig. 74d. Für einen Kreisprozeß, der zum Ausgangszustande (also die Kurve zum Ausgangspunkte) zurückführt, muß man bedenken, daß auf einem Teile dieses Weges, z. B auf dem Hinwege, Arbeit aufgewendet werden muß, die dann, wenn die Rückkehr auf demselben Wege erfolgt, wieder zurückgewonnen wird; daß das aber nicht mehr der Fall ist, wenn die Rückkehr auf einem anderen Wege erfolgt, und das ist tatsächlich immer bis zu einem gewissen Grade der Fall. Ist etwa in Fig. 74e die obere Kurve *abc* der Hinweg, so wird die dabei verbrauchte Arbeit durch die Fläche *dabce* repräsentiert, während die auf dem Rückwege *cfa* wiedergewonnene Arbeit nur von der Größe der Fläche *dafce* ist; es bleibt also ein Verbrauch von Arbeit bestehen gleich der Größe der geschlossenen, durch die ganze Prozeßkurve begrenzten Fläche *abcfa*. Dieser Energieverlust tritt immer auf; er kann größer oder kleiner sein oder sich auch unserer Feststellung entziehen, aber vorhanden ist er immer. Einen der interessantesten Fälle haben wir schon früher graphisch dargestellt, nämlich den Hysteresisverlust bei der zyklischen Magnetisierung eines weichen Eisenkörpers. In der Fig. 45 stellt die von dem Hin- und Rückwege eingeschlossene Fläche geradezu den Energieverlust dar. Es sei übrigens zur Vermeidung von Mißverständnissen bemerkt, daß diese Energie nicht wirklich verloren ist; sie ist nur für den Magnetismus verloren, sie findet sich wieder und zwar als Wärme: der Eisenkörper wird bei dem Prozesse der Hinundhermagnetisierung erhitzt.

Die Flächendarstellung läßt sich nun noch in sehr vielen anderen Fällen mit Erfolg und in der ver-



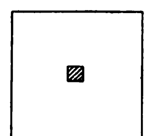
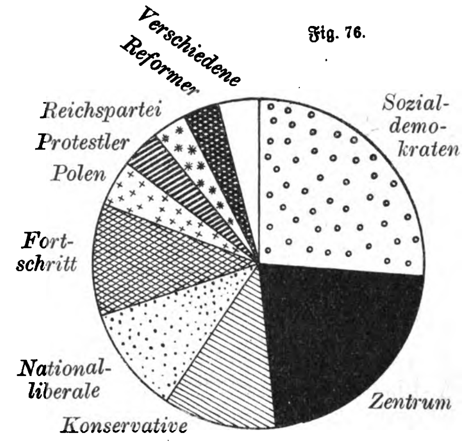


Fig. 75.



schiedensten Ausgestaltung anwenden, so zur vergleichenden Darstellung verschiedener Eigenschaften, wie der Größe und Bevölkerung eines Gebietes; in Fig. 75 stellt das äußere Quadrat links die Flächengröße des Deutschen Reiches, das äußere Quadrat rechts die von Schweden dar, und zwar in demselben Maßstabe; ebenso stellen die inneren, schraffierten Quadrate die Einwohnerzahlen beider Staaten dar, wiederum in einem für beide gleichen Maßstabe; man erkennt sofort den gewaltigen Unterschied in der Besiedelung beider Länder. Oder, in polarer Darstellung, d. h. mit Benutzung der Sektoren, in die man eine Kreisfläche einteilen kann. Diese Darstellung ist so verbreitet, daß ein Hinweis ausreichen wird; so sind in Fig. 76 die Anteile der verschiedenen Parteien an der Zusammensetzung des deutschen Reichstages dargestellt, und zwar durch verschiedene, am Rande erläuterte Schraffierungen; hier würde natürlich die Benutzung von Farben sehr viel eindringlicher wirken.

Im Anschluß hieran möge auch noch ein Fall betrachtet werden, wo die polare Darstellung in der Ebene nicht ausreicht, um das ganze Phänomen zu erschöpfen. Gemeint ist die graphische Darstellung aller möglichen Farben und Farbennuancen, derart, daß immer verwandte Farben nebeneinander zu liegen kommen. Eine polare Darstellung dieses Falles gibt Fig. 77a in Gestalt einer Kreisfläche, deren Randteile die reinen Spektralfarben liefern, deren Mitte das Weiß darstellt und deren mittlerer Ring Farben repräsentiert, die entstehen, wenn man die betreffende Spektralfarbe mit weiß mischt. Nun gibt es aber auch noch zahlreiche andere Mischfarben, die aus den Spektralfarben hervorgehen; und um diese darzustellen, muß man aus der Ebene hinausgehen und auf unserer Scheibe als Basis einen Kegel aufbauen; von diesem Kegel gibt nun Fig. 77b einen Schnitt in halber Höhe, dessen Kern dem Grau entspricht, und Fig. 77c einen Schnitt nahe der Spitze, die mit schwarz den Abschluß, nämlich die Lichtlosigkeit, bildet.

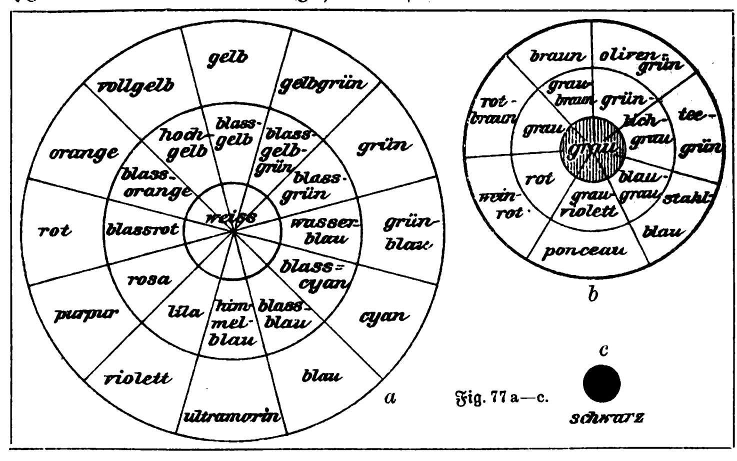


Fig. 77 a—c.

Schließlich ein Beispiel aus der abstraktesten aller Wissenschaften, der formalen Logik, und zwar ein Beispiel ältesten Datums, das Zeugnis dafür ablegt, wie frühzeitig man selbst auf einem derartigen Gebiete das Bedürfnis empfunden hat, die Anschauung zu Hilfe zu nehmen. Wenn es sich z. B. um den Ausspruch handelt: kein Teil von A ist ein Teil von B, so stellt man dies dar durch zwei Kreisflächen, die abseits voneinander liegen, wie in Fig. 78a; dagegen wird der Ausspruch: einige Teile von A sind zugleich auch Teile von B, durch die Kreise der Fig. 78b versinnbildlicht, die sich schneiden und daher ein gemeinsames Flächenstück, das schraffierte, haben; entsprechend wird der dritte Ausspruch: jeder Teil von A ist zugleich ein Teil von B, durch Fig. 78c charakterisiert, wo der eine Kreis gänzlich in dem anderen liegt. Endlich stellt Fig. 78d drei Gebiete dar, von denen je zwei ein gemeinsames Stück (schraffiert) und die alle drei zusammen auch noch ein gemeinsames Stück (gekreuzt) haben. In neuester Zeit ist das geometrische Verfahren in der Logik wieder aufgenommen und in einer früher nicht geahnten Mannigfaltigkeit entwickelt worden; ganze Ketten von Gedankenoperationen wer-

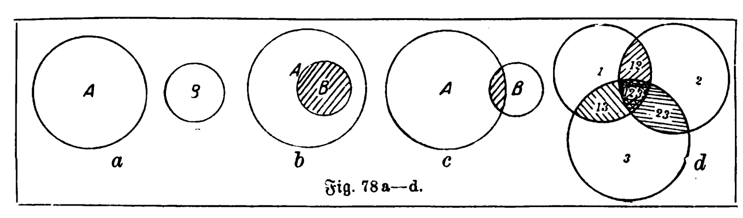


Fig. 78 a—d.

den teils in der Sprache der Algebra, teils (und oft parallel damit)

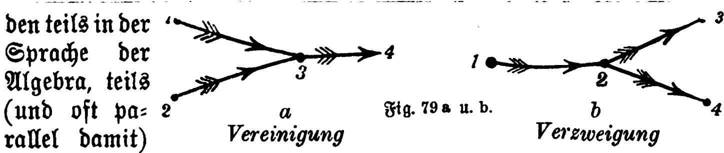


Fig. 79 a u. b.

geometrisch durchgeführt, und es wird gezeigt, um wieviel strenger ein solches Verfahren ist, und wie geeignet es gegenüber der Wortsprache ist, um Fehlschlüsse und Unklarheiten zu vermeiden. Den Höhepunkt hat die Methode erreicht in der sogenannten **Begriffsschrift**, in der die Begriffe und Sätze der Wortsprache in ein strenges und bis auf das feinste begründetes System von Linien und geometrischen Kombinationen übersetzt werden.

Übrigens ist damit die Mannigfaltigkeit der Anwendungen des Verfahrens auf philosophische Ideen bei weitem nicht erschöpft; die ganze **Symbolik der Erkenntnistheorie** und der geistigen Zusammenhänge läßt sich auf diese oder jene Art geometrisch versinnbildlichen. So spielt beispielsweise auf vielen Gebieten eine große Rolle ein Paar von Begriffen, die einander in gewissem Sinne entgegengesetzt sind: die Begriffe der **Vereinigung** und der **Verzweigung**. Es können nämlich einerseits mehrere Faktoren zu einer Einheit zusammenlaufen, und es kann sich anderseits eine Einheit in Teile auflösen; in Fig. 79 a und b sind diese beiden Vorgänge symbolisch zur Anschauung gebracht. Daran lassen sich dann zahlreiche Prinzipienfragen anschließen: über das Verhältnis zusammenwirkender Faktoren, über die Kausalität, über die Ein-

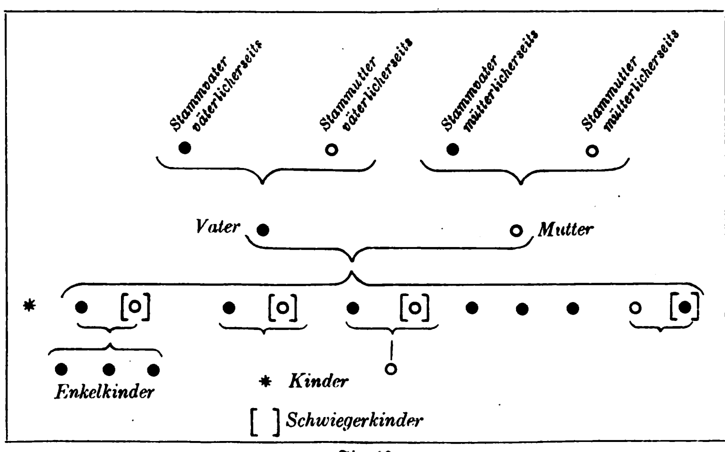


Fig. 80.

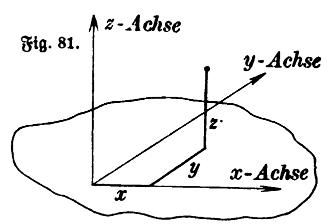


Fig. 81.

deutigkeit des Weltgeschehens usw. Es muß hier genügen, auf einen weit einfacheren und realeren Fall zu exemplifizieren: auf die allbekannte Darstellung der Generationenlehre durch Stammtafeln und Stammbäume; wie die schematische Fig. 80 zeigt, kombinieren sich hier die beiden Prozesse der Vereinigung (durch die Eheschließung) und der Verzweigung (durch die Nachkommenschaft) in einer schließlich nicht selten sehr verwickelte Formen annehmenden Weise. Insbesondere treten unter Umständen, nämlich bei Verwandtenheiraten usw., Brücken auf, die gewisse Glieder der Mannigfaltigkeit in Wegfall bringen und unter anderem von besonderem Interesse werden da, wo es sich um die Konstruktion der Ahnenreihe, um die Fragen der Vererbung usw. handelt.

Nachdem wir der Reihe nach Linien und Ebenen betrachtet haben, führt uns der letzte Gegenstand unserer Betrachtung aus der Ebene hinaus in den dreidimensionalen Raum. Wenn eine Größe nicht bloß von einer einzigen Variabeln abhängt, sondern von zweien, wenn also $z = f(x, y)$ ist, so müssen wir, wollen wir uns nicht, wie oben in Fig. 57a und b, auf mehrere getrennte Partialdarstellungen beschränken, das räumliche Achsensystem einführen, d. h., wie in Fig. 81, die natürlich perspektivisch aufzufassen ist, in der Grundebene die beiden aufeinander senkrechten Achsen der x und y legen und die Funktionswerte z durch die Längen der in den betreffenden Punkten der Grundebene errichteten Lote charakterisieren. Bei einigermaßen komplizierteren Funktionen wird natürlich eine solche perspektivische Zeichnung wenig übersichtlich, und es erhebt sich daher die neue Forderung: räumliche Modelle zu entwerfen. Diese können nun von dreierlei Art sein. Entweder, es werden einzelne Scharen von Linien hergestellt, die zusammen die Flächen, wenn auch nicht stetig, so doch in genügendem Zusammenhange ergeben; oder zweitens, es werden Scharen von Flächen hergestellt; oder drittens, der Körper mit seiner Grenzfläche wird selbst geformt. Im ersten Falle erhält man ein Draht- oder Fadenmodell, im zweiten ein Flächen- oder Kartonmodell, im dritten ein Gips-, Holz- oder Glasmodell. Fig. 82 gibt die Dehnungsfläche

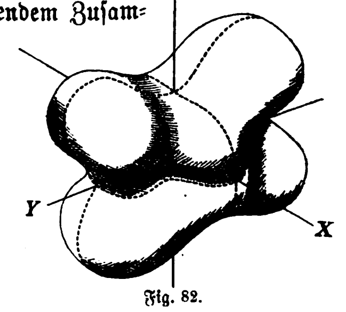


Fig. 82.

eines rhombischen Kristalls, des Baryts in perspektivischer Zeichnung wieder, das Modell stellt also eine räumliche Vereinigung und Ergänzung der in Fig. 70, obere Reihe, dargestellten Hauptschnitte dar.

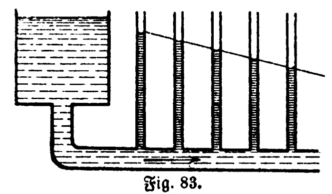
An diesem Beispiele muß es genügen, und das um so mehr, als man im Zweifel darüber sein kann, ob wir mit der Betrachtung derartiger räumlicher Modelle nicht den Bereich der „graphischen Darstellung" schon überschritten haben.

Elftes Kapitel.

Die Natur als graphische Darstellerin. Automatische Darstellung im Laboratorium. Natürliche Feldbilder. Magnetische, elektrische, chemische und optische Hilfsmittel.

Nach alledem, was bisher ausgeführt und an Beispielen erläutert worden ist, kann es keinem Zweifel unterliegen, daß die „graphische Darstellung" ein Lehr- und Forschungsmittel ersten Ranges ist, und daß man keine noch so große Mühe der Rechnung und Zeichnung scheuen darf, um sie bis ins äußerste nutzbar zu machen. Es erhebt sich damit aber zugleich die Frage, ob diese Mühe sich nicht vermindern ließe in derselben Weise, wie sich in der Technik die Handarbeit durch Anwendung maschineller Prozesse hat vermindern lassen; also dadurch, daß man die rechnerische Fähigkeit des menschlichen Kopfes und die zeichnerische Geschicklichkeit der menschlichen Hand durch ein mechanisches, am besten automatisches Verfahren ersetzt; kurz gesagt, ob es nicht möglich sei, die Natur selbst, natürlich mit der nötigen Anweisung, Unterstützung und Kontrolle, die graphische Darstellung besorgen zu lassen. In wie ausgedehntem Maße und bis zu welchem Grade der Vollkommenheit das in der Tat möglich geworden ist, wollen wir nunmehr untersuchen.

Wenn wir uns zunächst einmal in die freie Natur begeben, also sehen, was die Natur ganz für sich leistet, so finden wir schon eine Fülle von hierher gehörigen Zeugnissen. Man denke nur an die Kurven, die die von den Wellen ausgeworfenen Gewächse am Meeresstrande bilden und die man als Kurven gleichzeitiger Bespülung ansehen kann. Oder an die feinen Rippungen im Strandsande selbst, die im einzelnen zwar nicht ohne weiteres, sondern erst durch intimes Studium verständlich werden, im ganzen aber jedenfalls ein Abbild der Kräfte und Vorgänge sind, die sich zwischen bewegtem Wasser und losem Erdreich abspielen. Oder: wer kennt nicht die schönen Schichtenbildungen, die sich an Durchschnitten durch die Erdoberfläche da offen-


Fig. 83.

baren, wo sie infolge von Straßen- oder Bahnbauten, von Steinbrüchen oder sonstwie freigelegt sind? Sie geben ein Bild der wechselnden Erdschichten, der verschiedenen Materialien oder, bei gleichem Stoffe, der verschiedenen Konsistenz oder der Geschwindigkeit, mit der sich die Schichten aus dem allgemeinen Erdmeere abgelagert haben; und man kann an ihnen bis ins einzelne die Vorgänge, z. B. den Einfall und die Verwerfungen studieren.

Wir wollen uns hierbei nicht länger aufhalten, sondern ins Laboratorium des Naturforschers eintreten, um zunächst ganz einfache und an sich nicht eben sehr bedeutsame Fälle zu betrachten, die aber immerhin zeigen, in wie einfacher Weise eine anschauliche Vorstellung zustande kommt. Wir lassen Wasser durch eine Röhre strömen und beobachten dabei, daß infolge des sogenannten Röhrenwiderstandes der Druck von der Anfangs- zur Endstelle der Röhre immer kleiner wird. Versieht man nun das Rohr in gleichen Abständen mit vertikalen Ansatzrohren, so daß kleine Mengen des ausfließenden Wassers in diese „Manometer", hinaufsteigen, so erhält man, Fig. 83, in den Endpunkten der Wassersäulen sofort das anschauliche Gesetz jener Druckabnahme, im einfachsten Falle das Gesetz einer geraden Linie, also einer gleichförmigen Abnahme. Ein anderer, ähnlicher Fall: erhält man einen Kupferstab an einem Ende durch Wasserdampf dauernd auf 100°, am anderen Ende durch schmelzenden Schnee dauernd auf 0°, so fließt ein stationärer Wärmestrom durch ihn hindurch, und man kann die Temperaturen beobachten, indem man an gleichweit abstehenden Stellen durch Vermittelung kleiner, mit Quecksilber gefüllter Höhlungen Thermometer anbringt; die Quecksilbersäulen in ihnen geben dann mit ihren oberen Endpunkten direkt ein Bild des Temperaturverlaufes, der hier, wie Fig. 84 lehrt, durchaus nicht gleichförmig ist. In beiden Fällen liefert also die Natur unmittelbar die einzelnen Ordinaten (wie in Fig. 2a); das einzige, was man dann noch selbst zu leisten hat, ist die Verbindung dieser Punkte zu einer ausgeglichenen Kurve (wie in Fig. 2d oder e). Ein drittes Beispiel soll zeigen, daß die Natur auch die Kurven selbst zu liefern imstande ist. Zwischen zwei planparallelen Glasplatten, die sich in sehr geringem Abstande voneinander vertikal aufgestellt finden, steigt das

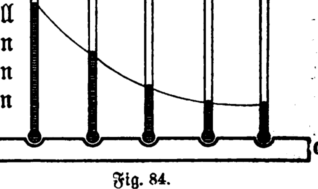


Fig. 84.

Wasser desto höher, je geringer jener Abstand ist; man kann das durch eine Reihe von Versuchen, bei denen man den Abstand immer kleiner macht, messend verfolgen. Man kann aber alle diese Versuche in einen einzigen zusammenfassen, indem man die beiden Platten keilförmig gegeneinander stellt, derart, daß der Abstand bei den Anfangskanten sehr klein ist und von da ab immer größer wird; das Wasser wird alsdann dort am höchsten und von dort ab in immer geringere Höhen steigen, und man erhält direkt, wie Fig. 85 zeigt eine Hyperbel als Gesetz der Steighöhen. Sehr hübsch endlich sind die Versuche über die Wärmeleitung in einer Kristallplatte, die man von ihrem Mittelpunkte aus erwärmt, etwa durch Aufsetzen einer heißen Spitze. Hat man die Platte vorher mit einem feinen Wachsüberzug versehen, so schmilzt dieses gleichzeitig weg an Stellen gleicher Temperatur, und beim Wiedererstarren erkennt man diese Stellen in der Form elliptischer Wachswälle, während man bei einer Glasplatte natürlich Kreiswälle erhalten würde.

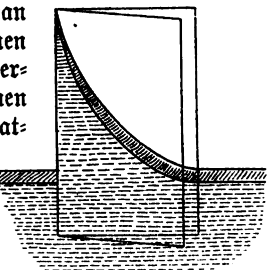


Fig. 85.

Weit interessanter aber als alle diese Einzelfälle sind zwei automatische Methoden, die wir nun betrachten wollen. Zunächst die Methode der von der Natur selbst hergestellten Feldbilder. Was man unter einem Felde versteht, das haben wir bereits früher (S. 62) erörtert, und wir haben dort auch schon Feldbilder hergestellt, sei es, wie bei den Luftdruckkarten, mit Hilfe zahlreicher Einzelbeobachtungen, sei es, wie bei den Fig. 66a und b, durch Berechnung auf Grund der allgemeinen Theorie der Wirksamkeit von Kraftquellen; eine Berechnung, die, wie gesagt, recht mühsam und zeitraubend ist und trotzdem noch den Wunsch offen läßt, die Berechnung durch die Erfahrung bestätigt zu sehen. Mit einem Schlage nun erhält man solche Feldbilder durch gewisse natürliche Prozesse, deren wichtigster sich auf magnetische Felder bezieht. Legt man auf die Polflächen eines oder einiger in bestimmter Weise angeordneter Magnetstäbe eine Glasplatte oder ein Blatt steifes Papier, streut Eisenfeilspäne von geeigneter (nicht allzugroßer) Feinheit darauf und klopft nun leise mit dem Finger auf die Fläche, so sieht man, wie sich die feinen Nadeln nach bestimmten Linien ordnen, und diese Linien sind die magnetischen Kraftlinien. Nachdem man sie einmal erhalten hat, kann man sie entweder durch eine klebrige Flüssigkeit direkt fixieren oder, ehe man sie wieder zerstört, photographisch reproduzieren und in jedem dieser Fälle nachher in aller Ruhe studieren.

Der Mangel dieser Methode ist der, daß man die Isokurven, die Linien gleicher magnetischer Spannung, nicht mit erhält; aber dafür erhält man die Kraftlinien unmittelbar und kann jene leicht durch geometrische Konstruktion als die auf ihnen senkrechten Linien hinzufügen. Von den zahlreichen Feldbildern, die man so erhalten hat, können hier nur wenige ausgewählt werden. Geht das Feld von einem einzigen Pole aus, d. h. legt man die Fläche auf das eine Polende eines langen Stabes, dessen anderes Ende somit genügend weit entfernt liegt, um nicht mitwirken zu können, so erhält man das Feilichtbild der Fig. 86a, in dem man deutlich die radial angeordneten Kraftlinien und ihre mit wachsendem Abstand vom Pole zunehmende Zerstreuung erkennt. Wird das Feld von zwei gleichstarken, gleichnamigen Polen erzeugt, d. h. befinden sich unter der Platte zwei in einiger Entfernung voneinander vertikal aufgestellte Magnetstäbe mit den Nordpolen (oder auch mit den

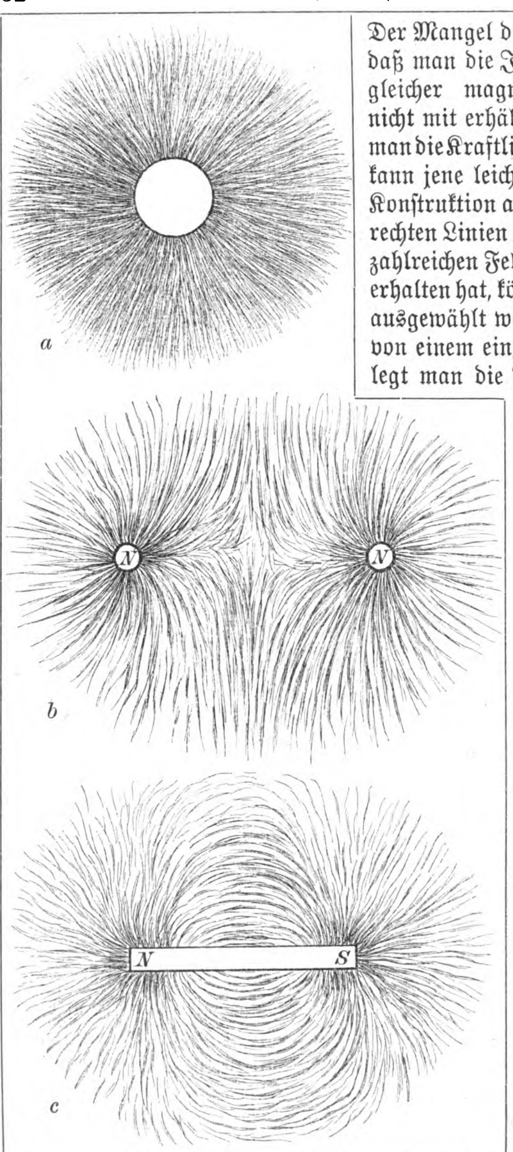
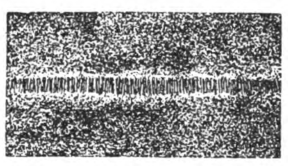


Fig. 86 a—c.



a

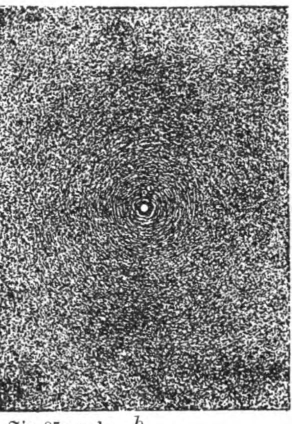
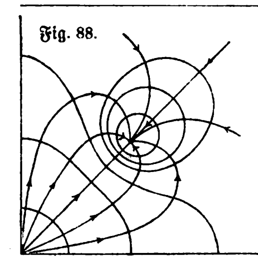


Fig. 87 a u. b. b

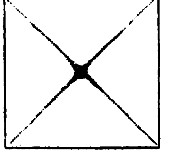
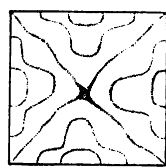
Südpolen) nach oben, so entsteht das Freilichtbild der Fig. 86 b, und ein Vergleich mit dem entsprechenden, früher (S. 66) wiedergegebenen theoretisch hergestellten Bilde der Fig. 66 a, die sich auf denselben Fall bezieht, läßt die Übereinstimmung, nämlich die Abstoßung der Kraftlinien des einen Pols durch die des anderen erkennen, zugleich aber auch die, mehr äußerlichen Unterschiede: das von der Natur hergestellte Bild ist weniger exakt, aber dafür lebendiger als das berechnete, und außerdem fehlen in ihm die Niveaukurven. Endlich gibt Fig. 86 c das Bild eines der Länge lang unter dem Blatte liegenden Stabes, also in der Hauptsache das seiner beiden gleichstarken, aber entgegengesetzten Pole; wie man sieht, ziehen sich hier die nach innen laufenden Kraftstrahlen der beiden Pole gegenseitig an und bilden Brücken von dem einen Pole zum anderen. Aber die Feilspäne ordnen sich auch dann in bestimmter Weise an, wenn das magnetische Feld nicht von Magnetpolen herrührt, sondern von elektrischen Strömen; nur ist dann die Anordnung grundsätzlich verschieden. Ist z. B. in Fig. 87 a die rechteckige Glasplatte, auf der die Späne liegen, auf einen unter ihrer Mittellinie von links nach rechts laufenden, stromdurchflossenen Draht gelegt, so ordnen sich die Teilchen in der Querrichtung an, die magnetischen Kraftlinien stehen also auf den elektrischen Stromlinien senkrecht; und noch lehrreicher ist die Fig. 87 b, wo der stromdurchflossene Draht von unten nach oben durch die zu diesem Zwecke punktförmig durchbohrte Glasplatte hindurch gesteckt ist; hier ordnen sich die Kraftlinien nicht, wie um einen Magnetpol (Fig. 86 a), radial, sondern im Gegenteil peripherisch an, die magnetischen Kraftlinien bilden sozusagen einen Wirbel um den elektrischen Strom als Achse.

Außer den Feilichtfiguren gibt es noch zahlreiche andere, die uns Aufschluß geben über die Konstitution von Feldern und ähnlichem. So sei auf folgendes Problem hingewiesen: wenn man einen elektrischen Strom mittelst eines Drahtes in ein ausgedehntes Metallblech und von da durch einen anderen Draht wieder fortleitet, so bildet sich in der Metallfläche


Fig. 88.

ein System von Stromlinien und auf diesen senkrecht stehenden Niveaulinien; je nach der Lage der Pole und der Gestalt der Fläche sind diese Linienscharen ganz verschieden. Man kann sie einerseits durch Rechnung, anderseits durch Beobachtung ermitteln, und erhält dann z. B in dem Falle, wo der Strom in ein ausgedehntes Metallquadrat durch eine seiner Ecken eintritt, in der Nähe dieser Ecke und zwar auf einem Punkte der Diagonale des Quadrates aber wieder austritt, das Bild der Fig. 88, in der die Stromlinien durch Pfeile gekennzeichnet sind. Man kann nun solche Bilder elektrischer Strömungsfelder automatisch erhalten auf chemischem Wege, wenn man das Metallblech auf den Boden eines zylindrischen Gefäßes bringt und dieses mit einer Schicht einer geeigneten Flüssigkeit anfüllt, die durch den elektrischen Strom zersetzt und auf dem Bleche niedergeschlagen wird, und zwar je nach der Stromstärke an der betreffenden Stelle in verschiedener Dicke. Diese Dicke gibt sich nun, wegen der entstehenden optischen Interferenzen, durch die Farbe des Niederschlags zu erkennen; und so erhalten wir schöne vielfarbige Figuren mit „Linien gleicher Farbe", die je nach den Umständen kreis- oder ellipsen- oder nierenförmig usw. sind; man nennt sie nach ihrem Entdecker Nobilische Ringe. Eine andere Art elektrischer Figuren, durch geeignete staubförmige Substanzen im Felde elektrischer Entladungen gebildet, sind die Lichtenbergschen Figuren, wieder andere sind optischen Charakters und beruhen auf der Interferenz oder der Beugung des Lichtes, wie die Newtonschen Ringe, die wundervollen und mannigfaltigen Interferenzbilder, die die Kristalle liefern, und so gibt es hier eine Fülle von Phänomenen; leider verlieren sie fast ganz den Sinn und zugleich ihre Schönheit, wenn man auf die Farben verzichten muß; und so mag es mit diesem Hinweise sein Bewenden haben.

Schließlich sind hierher auch die mannigfachen Figuren zu rechnen, die sich bei den Tonerscheinungen automatisch ausbilden, wenn man geeignete Hilfsmittel dazu benutzt, und die eine Anschauung von den Isokurven auf diesem Gebiete geben. Berühmt sind namentlich die Chladnischen Figuren, die man erhält, wenn man eine Metallscheibe, auf die man feines Pulver streut, mit dem Bogen zu Tönen erregt; je nach der Form der Scheibe, der Randstelle, die man streicht und den



a Fig. 89 a u. b. *b*

Stellen, die man etwa mit dem Finger festhält, ergeben sich die mannigfaltigsten Figuren, von den einfachsten von der Art der Fig. 89a bis zu den komplizierten wie die Fig. 89b.

Zwölftes Kapitel.

Automatische Bewerkstelligung der chronographischen Auflösung. Mechanisches und photographisches Verfahren.

Alle bisherigen Darstellungen bezogen sich auf Zustände, es waren Momentbilder oder Bilder vom Dauercharakter; wir wollen jetzt zu Bewegungsvorgängen übergehen und beginnen mit Fällen einfacher Bewegung, die, wie sie in Wirklichkeit vorgeht, auch zur Darstellung kommt. Denken wir uns eine Kreisscheibe auf einer geradlinigen Bahn rollen und fragen wir, welche Bahn ein Punkt der Scheibe dabei beschreibt; man kann diese Kurve durch Rechnung ermitteln, man kann auch nach und nach eine größere Zahl von Lagen des Punktes beobachten und daraus die Kurve zusammenstellen. Viel einfacher und zugleich eindrucksvoller ist es aber, den Punkt seine Bahn selbst beschreiben zu lassen, etwa in der Weise, daß man an ihn einen seitlich hervorragenden Schreibstift befestigt, der beim Fortrollen der Scheibe seine Spur auf einer der Länge nach aufgestellten Schreibfläche hinterläßt. Man erhält dabei Kurven, die allgemein Zykloiden heißen, aber je nach der Lage des erzeugenden Punktes verschiedene Gestalt haben: wenn der Punkt am Rande der Scheibe liegt, entsteht eine Zykloide mit Spitzen, wie die in Fig 90 ausgezogene Kurve; liegt er innerhalb, so entsteht die gestrichelte Zykloide mit Abrundungen; liegt er außerhalb des Rades (was man mechanisch dadurch erreichen kann, daß man ihn durch eine hervorragende Latte mit ihm verbindet), so entsteht eine, in der Figur punktierte, Zykloide mit Schleifen.

Ein anderes Beispiel bietet die Kreiselbewegung, die doch zu fein und rasch ist, als daß man ihre Einzelheiten mit dem Auge verfolgen

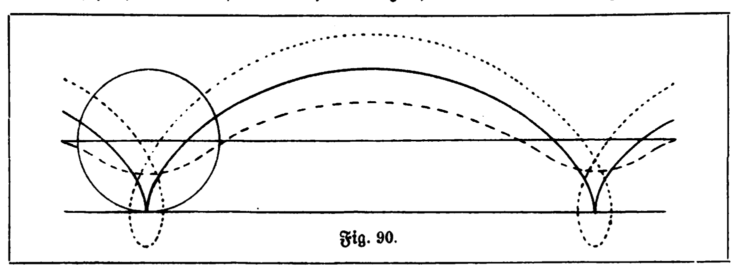


Fig. 90.

könnte. Man läßt daher den Kreisel nach oben in eine Schreibspitze auslaufen und hält mit ganz geringem Druck, so daß man die Kreiselbewegung nicht stört, ein Kartonblatt darüber; auf ihm zeichnet sich dann die Kreiselbewegung ab, und zwar in so bis ins einzelne getreuer Weise, daß es nicht möglich ist, hier ein ebenbürtiges Bild zu reproduzieren; immerhin wird die Fig. 91 eine Vorstellung von der Leistungsfähigkeit der Methode geben. Übrigens kann man sich kaum eine größere Mannigfaltigkeit von Typen und Einzelformen denken, als sie gerade bei der Kreiselbewegung vorkommen.

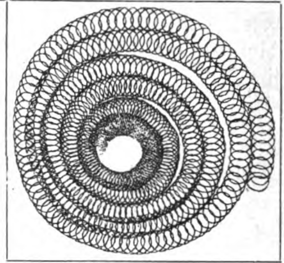


Fig. 91.

In der Technik spielt eine besonders wichtige Rolle die automatische Aufzeichnung der für eine Maschine charakteristischen Größen, insbesondere der aus diesen Größen sich aufbauenden, von der Maschine geleisteten Arbeit. Die Vorrichtung, die hierzu dient, heißt **Indikator**, und die von ihm gelieferten Zeichnungen heißen **Indikatordiagramme**. Auf die Einrichtung des Apparates kann hier nicht eingegangen werden, es muß genügen, in Fig. 92 zwei Beispiele aufzuführen, nämlich das einer einfachen Dampfmaschine (*a*), und das einer dreifachen Verbundmaschine (*b*). Abszissen sind die Volumina des Dampfes, Ordinaten die Drucke, die Fläche also die Arbeitsleistung; die vom Schreibstifte gelieferten Kurven sind die inneren (bei *a* eine einzige, bei *b* drei Kurven), die äußeren Umgrenzungen stellen theoretische Kurven dar, die Differenz der Flächen, die durch Schraffierung charakterisiert ist, veranschaulicht also den durch die unvermeidlichen Nebenumstände verursachten Arbeitsverlust.

Am wichtigsten aber und auf außerordentlich vielen Gebieten der Wissenschaft und Praxis fruchtbar geworden ist das **automatische Verfahren** bei der uns schon bekannten und in ihrer Bedeutung gewürdigten **Methode der chronographischen Auflösung** (Fig. 37 u. f.). Sie hat den Zweck, periodische Vorgänge irgendwelcher Art auf einer Zeitachse zu verzeichnen, und zwar in Gestalt regelmäßiger oder unregelmäßiger Wellenlinien; damit

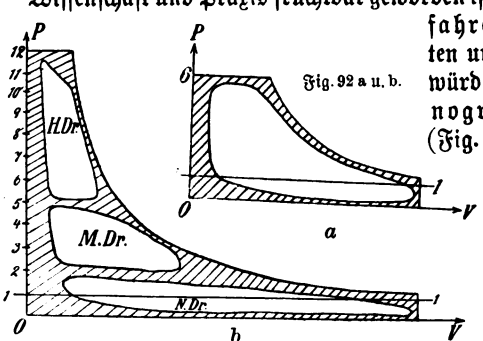


Fig. 92 a u. b.

wird erstens erreicht, daß man die Vorgänge nachträglich in aller Ruhe studieren kann, zweitens, daß man Einzelheiten des Prozesses erkennt, die man direkt gar nicht wahrnimmt, und drittens, daß man Vorgänge, die sich ungeheuer rasch abspielen, gewissermaßen zur Ruhe zwingt.

Fangen wir mit langsamen Vorgängen an! Jedermann kennt die an öffentlichen Plätzen aufgestellten Wettersäulen, in denen Thermometer, Barometer, Hygrometer und andere Apparate hängen, die man einfach abliest; außerdem aber für jedes der betreffenden Phänomene, also für die Temperatur, den Luftdruck, die Feuchtigkeit usw., noch eine andere Klasse von Apparaten, die man im Gegensatz zu den „Metern" als „Graphen" bezeichnet: Thermograph, Barograph usw. Es sind Apparate, bei denen mittelst eines sinnreichen Mechanismus ein Schreibstift auf einer durch ein Uhrwerk in gleichförmige Rotation und zugleich langsame Achsenfortschreitung versetzten Papierrolle die Temperatur, den Luftdruck usw., aufzeichnet; aus einer in Wahrheit ätherischen Erscheinung wird hier eine konkrete farbige Linie, aus einer hinundherschwingenden Bewegung des Schreibstiftes wird durch die fortrückende Bewegung des Papieres eine Wellenlinie mit Bergen und Tälern; auf den Bergen ist Temperatur und Luftdruck hoch, in den Tälern niedrig, und so kann man mit einem Blicke das Wetter einer ganzen Woche überschauen.

Eine der interessantesten Anwendungen der chronographischen Auflösung langsamer Wellenbewegungen ist die auf jene größte aller Wellenbewegungen auf der Erde, die wir G e z e i t e n oder auch E b b e u n d F l u t nennen. Und zwar handelt es sich zunächst gar nicht um die wirkliche Ausbreitung des Phänomens rund um die Erde in Wellenform. sondern um die Erscheinung, die sich an einem bestimmten Orte darbietet. Hier besteht sie darin, daß der Meeresspiegel periodisch steigt und fällt, und diese Schwingungsbewegung ist es, die man auf einem vorbeigleitenden Papierstreifen aufzeichnet, wodurch sie sich den Augen als Wellenlinie darstellt. Man hat überaus sinnreiche Apparate konstruiert, mit Hilfe deren man gegenwärtig das Problem der Gezeiten in vorzüglicher Weise beherrscht. Der erste dieser Apparate ist eben der F l u t s c h r e i b e r, eine Probe seiner Aufzeichnungen ist in Fig. 93 wiedergegeben, und zwar das Steigen und Fallen des Meeresspiegels im Laufe von acht Tagen, wobei jede Kurve von rechts nach links zu lesen ist und ihre unmittelbare Fortsetzung in der nächsten Kurve findet. Man sieht, daß wir hier zwar eine schwingende Bewegung vor uns haben, aber die Gipfel und Täler sind an verschiedenen Tagen und zu den verschiedenen Tageszeiten verschieden hoch und tief, und außerdem verschiebt sich der Eintritt der Maxima und Minima von Tag zu Tag. Der



engl. Fuß

Stunden

Fig. 93.

zweite Apparat ist der Flut-Analysator, eine komplizierte Maschine, die, über die aufgezeichnete Kurve hingeführt, sie in lauter einfache Sinuswellen auflöst, in dem früher besprochenen und in Fig 40 veranschaulichten Sinne. Man erfährt auf diese Weise, welchen Anteil an dem Steigen und Fallen des Wassers der Mond und die Sonne mit den verschiedenen Elementen ihrer Bewegung haben. Endlich gibt es drittens einen Flutverkünder, eine noch kompliziertere Maschine, die die vorliegende Kurve in die Zukunft hinein fortsetzt und so die zu erwartenden Wasserstände bis zu einem gewissen Grade vorherzusagen erlaubt.

Ähnliche Bewegungen, wie es die Gezeiten für das große Erdmeer sind, existieren, wenn auch in seltenerer und anomalerer Weise, auch für die feste Erdoberfläche: es sind die Erdbeben, die sich ebenfalls in Wellenform ausbreiten. Seit einigen Jahrzehnten hat man die Erforschung dieser Erscheinung in systematische Form gebracht, und es existieren gegenwärtig zahlreiche Erdbebenwarten oder seismische Stationen, auf denen man die lokalen Schwingungen des Erdbodens infolge eines irgendwo auftretenden Bebens selbsttätig aufzeichnet, und zwar

in sehr verschiedener Weise, sowohl was die darzustellende Bewegung betrifft (vertikale, horizontale Verschiebungen, Neigungen, Drehungen), als auch was das Hilfsmittel der Aufzeichnung angeht. In letzterer Hinsicht ist hier die geeignete Stelle, um einen kleinen Exkurs zu machen, der sich nicht bloß auf dieses Problem bezieht, sondern auf alle Fälle, in denen periodische Bewegungen von Apparaten selbsttätig fixiert werden sollen.

In allen diesen Fällen bieten sich nämlich, abgesehen von der übrigen Mannigfaltigkeit der Ausführung, zwei Möglichkeiten dar: die graphische Aufzeichnung im engeren Sinne oder mechanische Aufzeichnung mit Hilfe eines irgendwie an dem schwingenden Systeme befestigten Schreibstiftes, der auf einer durch ein Uhrwerk fortbewegten Schreibfläche mit irgendeinem Material Kurven auszeichnet (Tinte, farbige Tusche, Bleistift, Wegfegen des Rußes von einer gleichförmig berußten Glas- oder Papierfläche usw.); oder aber die photographische Aufzeichnung, bei der die maßgebende Stelle des schwingenden Systems gut beleuchtet und der entstehende Lichteindruck auf dem bewegten Streifen lichtempfindlichen Papieres in Gestalt der Kurve fixiert wird. Die photographische Methode hat einige große Vorzüge gegenüber der mechanischen, namentlich die fortfallende Beschwerung des schwingenden Systems mit einem, wenn auch noch so leichten Zeichenapparat, die fortfallende Trübung der Aufzeichnung durch die Eigenschwingung dieses letzteren und manches andere; man wird sie daher überall da anwenden, wo die wesentlich höheren Kosten nicht ins Gewicht fallen, und namentlich immer dann, wenn es sich um besonders feine schwingende Systeme handelt. Übrigens ist in beiden Fällen, wenn irgend tunlich, dafür zu sorgen, daß durch eine besondere Einrichtung auf dem Diagramm neben der Hauptkurve noch eine Linie mit Zeitmarken entsteht, auf der etwa jede Sekunde oder jede zehnte Sekunde oder jede Minute durch eine Unterbrechung oder einen Einschnitt oder sonstwie gekennzeichnet wird, damit man das Hauptphänomen gleich auch in die richtige Beziehung zur Zeit setzen könne.

Kehren wir jetzt zum Phänomen des Erdbebens zurück, so erhalten wir also mit irgendeinem der mannigfaltigen, hierfür ersonnenen Apparate ein „seismisches Diagramm"; eine schematische Probe davon gibt die Fig. 94 a. Während unter normalen Verhältnissen die aufgeschriebene Linie horizontal nach rechts verläuft, höchstens mit einigen kleinen Zitterungen, die von zufälligen Ursachen (wie Straßenbahnen) herrühren, verwandelt sie sich jetzt in eine anfangs niedrige, dann immer kräftigere Wellenlinie, in deren Verlauf man deutlich mehrere Phasen unterscheiden kann, entsprechend dem Vorbeben, dem Hauptbeben, dem Endbeben und

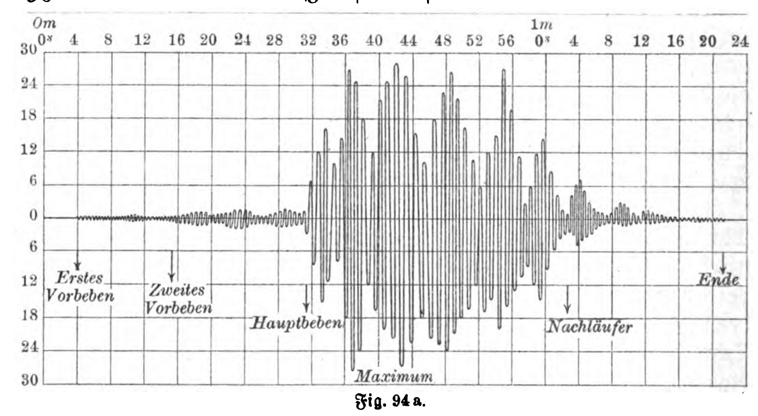


Fig. 94 a.

dem Nachläufer. In Wahrheit liegen die Wellen oft viel dichter beieinander; und wenn das Beben sehr kräftig ist, entsteht nicht selten eine so heftige Schwingung des Schreibstiftes, daß sich seine Spuren überdecken, er selbst aber aus den Angeln gerät, womit natürlich der Aufzeichnung ein vorzeitiges Ende gesetzt ist. Ein solcher Fall, der sich auf das berüchtigte Erdbeben von Messina bezieht, ist in Fig. 94 b nach einem Originalphotogramm wiedergegeben; die vielen Horizontallinien stellen den ruhigen Gang des Stiftes in den dem Erdbeben vorangegangenen Stunden dar, das Beben selbst wird durch den mächtigen schwarzen Komplex von Vertikalschwingungen veranschaulicht.

Eine große Rolle spielen derartige Aufzeichnungen auch in der Physiologie, für die Darstellung und Erkenntnis der Vorgänge in dem lebenden Organismus, sei es nun, daß es sich um Versuche an Tieren oder direkt um Beobachtungen am Menschen handelt. Als Beispiele mögen hier gewählt werden die Herzbewegungen, die mit dem Kardiographen aufgenommen werden, Fig. 95 a, wo die obere Kurve den Druck in der rechten Herzkammer, die untere aber direkt den Herzstoß darstellt; und der Pulsschlag, der mit dem Pulsschreiber oder Sphygmographen aufgenommen wird und zu Diagrammen von der Art des in Fig. 95 b wiedergegebenen führt (oben sind die Zeitmarken zu sehen).

Der letzte Gegenstand unserer Betrachtung sind die raschen Schwingungen, so rasche, daß wir ihnen, obgleich uns der schwingende Körper vor Augen steht, trotzdem mit dem Auge nicht folgen können. Hierher gehören also die Tonschwingungen, z. B. die einer Saite oder einer Stimmgabel. Die Hilfsmittel, deren man sich hier bedienen kann, sind äußerst zahlreich, und erst in der neueren Zeit hat man gelernt, sich

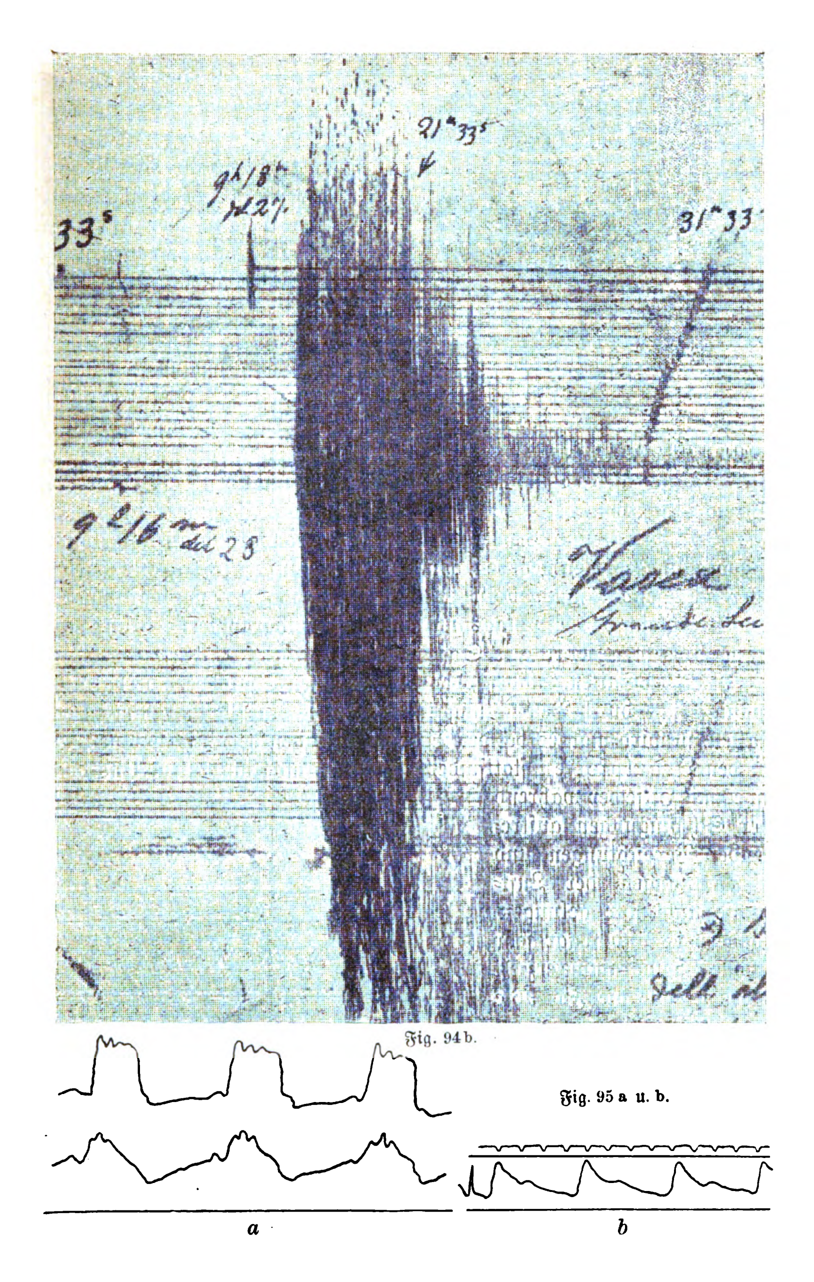


Fig. 94 b.

Fig. 95 a u. b.

a *b*

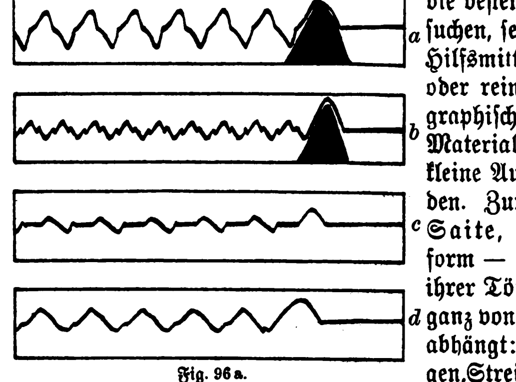


Fig. 96 a.

die besten und feinsten auszusuchen, seien es nun graphische Hilfsmittel im engeren Sinne oder rein optische oder photographische. Aus dem reichen Material kann hier nur eine kleine Auswahl getroffen werden. Zunächst der Fall einer Saite, deren Schwingungsform — und damit der Klang ihrer Töne (vgl. ob. S. 40) — ganz von der Art der Erregung abhängt: durch Zupfen, Schlagen, Streichen usw., und in jedem dieser Fälle wiederum von den besonderen Umständen, z. B. von der Streichstelle, von der Breite und Weichheit des Hammers usw. In Fig. 96a und b sind Proben solcher photochronographisch aufgelöster Schwingungsformen gegeben, von denen sich a auf geschlagene Saiten (der schlagende Hammer ist in dem Falle, wo der photographierte Punkt zugleich der Anschlagspunkt ist, mitphotographiert), b auf mit dem Bogen gestrichene Saiten bezieht.

Ist es bei Saiten, Stäben oder anderen festen Tonkörpern verhältnismäßig leicht, durch Beleuchtung eines Punktes ein Photogramm zu erhalten, so wird man es bei den Tonschwingungen der Luft, wie sie z. B. in den Orgelpfeifen stattfinden, für kaum möglich halten. Und doch ist es mit Hilfe der während der Schwingungen auftretenden Verdichtungen und Verdünnungen der Luftmasse nicht nur gelungen, sondern es sind sogar sehr schöne Photogramme erzielt worden, wie die Fig. 96 c zur Genüge bezeugt; die Darstellung bezieht sich auf eine gedackte Orgelpfeife unter verschiedenen Anblasedrucken (oben am kleinsten, unten am größten). Handelt es

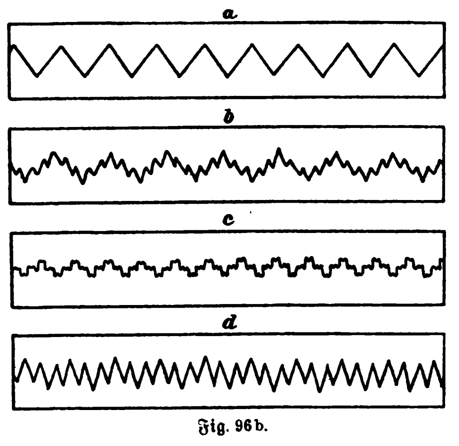


Fig. 96 b.

sich nicht um die photographische Fixierung und wissenschaftliche Untersuchung, sondern lediglich um Zwecke der Demonstration bei Vorlesungen, so leistet eine andere, in ihrer Handhabung weit einfachere Methode gute Dienste: die Methode der **Flammenbilder im rotierenden Spiegel.** Sie beruht auf einem kleinen, aber sinnreichen Apparat, der manometrischen Kapsel, einem kleinen Raume, der an der einen Seite durch eine elastische Membran verschlossen ist, und durch den ein Gasstrom hindurch und zu einer Flamme geleitet werden kann. Wenn man jetzt die Membran mittelst eines Schlauches von außen durch Töne erregt, schwingt sie hin und her, der Gasdruck und damit die Flamme gerät in periodische Schwingungen, natürlich in so schnelle, daß man sie nicht einzeln wahrnehmen kann; man bemerkt nur, daß die Flamme unruhig wird. Wenn man nun aber einen vierkantigen Spiegel der Flamme gegenüberstellt und ihn um eine vertikale Achse in Rotation versetzt, so sieht man — denn das ist ja auch eine Art chronographischer Auflösung —

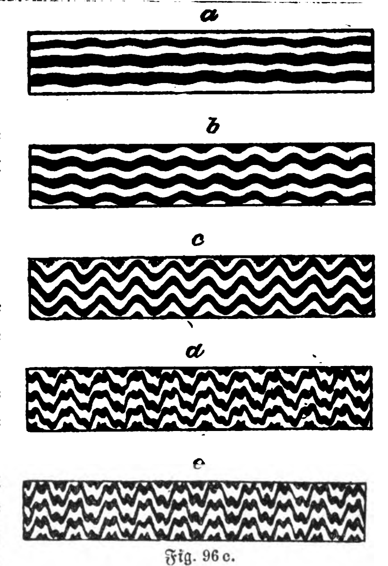


Fig. 96 c.

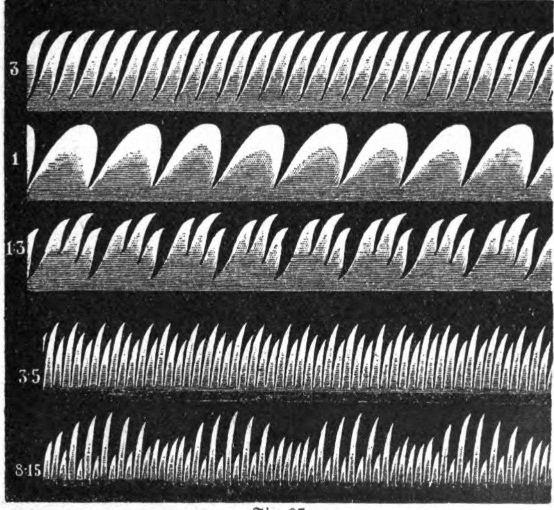


Fig. 97.

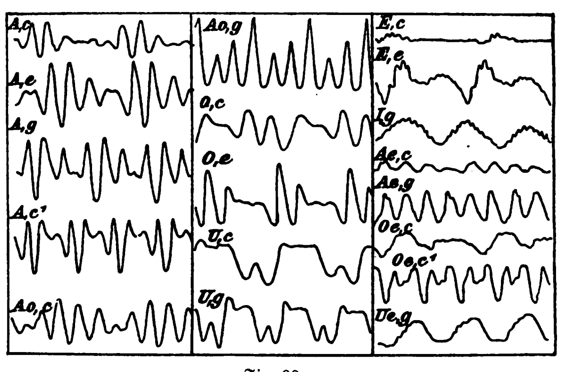


Fig. 98 a.

die einzelnen Flammenbilder nebeneinander, und jetzt erkennt man, daß große und kleine Flammenhöhen abwechseln, und zwar je nach dem erregenden Tone in verschiedener Weise. In Fig. 97 sind einige solche Flammenbilder wiedergegeben; die beiden ersten Reihen beziehen sich auf zwei Töne, deren Schwingungszahlen sich wie 3 zu 1 verhalten, von denen also der obere die Duodezime des anderen ist; die dritte Reihe bezieht sich auf den Fall, daß man diese beiden Töne gleichzeitig erklingen läßt; die beiden untersten beziehen sich auf andere, an der Seite vermerkte Akkorde; jedes Bild ist typisch anders, und es ist nicht schwer, aus dem Bilde die Eigentümlichkeiten des Falles zu begreifen.

Das interessanteste Objekt der Klanganalyse durch graphische Darstellung sind die *Töne der menschlichen Stimme* und die *Laute der menschlichen Sprache*. Kein Wunder, daß diese Methode neuerdings ganz besonders gepflegt worden ist und sogar übergegriffen hat auf das Gebiet der vergleichenden Sprachwissenschaft, insbesondere der *Phonetik*. Jedem Vokale und jedem Konsonanten entsprechen ganz bestimmte (allerdings noch von den Umständen, z. B. von der Tonhöhe abhängige) Kurven, wie sie für einige Vokale (mit beigefügter Tonhöhe) in Fig. 98a, für einige Konsonanten in Fig. 98b reproduziert sind; und die

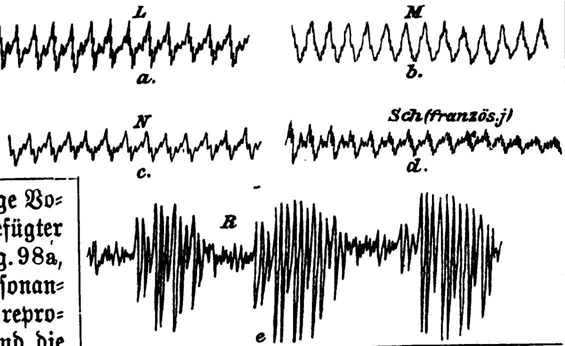


Fig. 98 b.

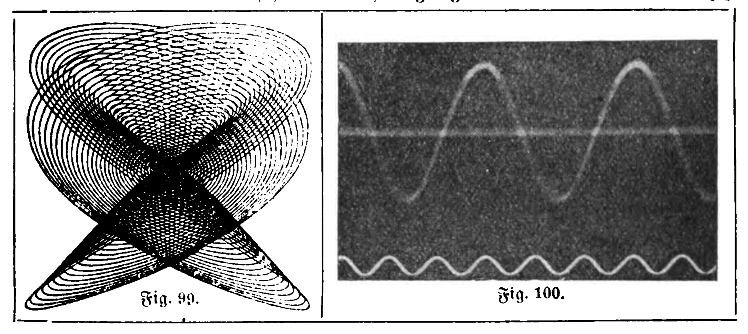


Fig. 99. Fig. 100.

geringste Änderung in der Klangfarbe, z. B. durch Dialekt oder Affekt oder sonstwie, macht sich in dem speziellen Verlaufe der Kurve geltend. Daß man in dem Phonographen ein Instrument besitzt, mit dem man nicht nur solche „Lautbilder" aufnehmen und konservieren, sondern sie auch jederzeit wieder tönend reproduzieren kann, ist allgemein bekannt; und schon sind ganze „Phonogrammarchive im Entstehen begriffen, durch die die sprachlichen und musikalischen Leistungen von Völkern und einzelnen Individuen der Nachwelt aufbewahrt werden. Schließlich sei an die bekannten Lissajous-Figuren erinnert, die durch Kombination zweier zueinander senkrechter Schwingungen entstehen. Hier sei eine automatisch hergestellte derartige Kurve wiedergegeben, und zwar handelt es sich in diesem Falle um gedämpfte Schwingungen; infolgedessen fällt der zweite Zyklus, den der Schreibstift zurücklegt, mit dem ersten, der dritte mit dem zweiten nicht genau zusammen usw., und man erhält daher die schöne Fig. 99.

In neuester Zeit spielen die raschen Schwingungen noch auf einem anderen Gebiete eine große Rolle, und die Gesetze sind hier ganz entsprechende wie in der Akustik: gemeint sind die elektrischen Schwingungen, von denen ja auch schon (S. 41) die Rede war. Auch sie kann man in sehr schöner Weise automatisch aufzeichnen mit Hilfe eines Apparates, der Oszillograph heißt und sich schon in der kurzen Zeit seines Gebrauches als äußerst fruchtbar erwiesen hat. In Fig. 100 ist die von einem solchen Apparate photographisch aufgenommene Kurve der Schwankungen des Stromes einer Wechselstrommaschine wiedergegeben, und zwar gleichzeitig mit der darunterstehenden Kurve einer Stimmgabel von bekannter Tonhöhe, so daß man durch Vergleichung die Periode des Wechselstroms ermitteln kann.

Schluß.

Zusammenfassung der Ergebnisse. Bedeutung der graphischen Methode für Lehre und Forschung.

Werfen wir jetzt einen Rückblick auf unsere Betrachtungen, so müssen wir uns immer gegenwärtig halten, daß wir in dem knappen Rahmen dieser Darstellung nur die Hauptzüge einer Methode von universeller Bedeutung vorführen und auch diese nur zum Teil etwas gründlicher erörtern konnten. Immerhin haben wir unter anderem folgendes erfahren. Erstens: die überaus weite Anwendbarkeit der Methode. Sie ist nicht auf die mathematischen und Naturwissenschaften beschränkt, sie setzt überall da mit großem Erfolge ein, wo man sich auf das Niveau erhoben hat, auf dem man die Erscheinungen nicht mehr bloß qualitativ beschreibt, sondern in ihren quantitativen Beziehungen und damit in exakter Weise erfaßt. Hat doch der große Immanuel Kant erklärt, in jeder Wissenschaft sei nur so viel wahre Wissenschaft, als in ihr Mathematik vorhanden sei. Das soll eben heißen: solange man sich mit nur qualitativ gefaßten Begriffen und Ideen „herumschlägt", kann man nicht erwarten, irgend etwas Einwandfreies zu gewinnen, irgend etwas auszusagen, was nicht von anderer Seite bestritten und durch einen anderen Ausspruch ersetzt würde; die Lösung des Rätsels liegt darin, daß dieser Andere die Begriffe anders definiert, die Ideen anders gruppiert und alsdann naturgemäß andere Schlüsse zieht. Solche Vieldeutigkeiten werden sofort unmöglich, sobald man jeden Begriff als „mathematische Größe" einführt. Dann erhält man Zahlen, diese Zahlen reden eine eiserne Sprache; und wenn sie drohen, durch ihre abstrakte Vielheit zu verwirren, übersetzt man ihre Sprache in die der räumlichen Anschauung und wendet die graphische Methode an. Nun wird man einwenden: das ist ja alles schön und gut: aber es ist doch eben prinzipiell nur möglich für Dinge, die ihrer Natur nach von mathematischem Charakter sind; nicht aber für andere Dinge, und zu diesen ist man geneigt schon zum Teil das organisch-physische, ganz gewiß aber alles rein geistige zu rechnen. Gewiß ist das eine Schwierigkeit; aber Schwierigkeiten sind doch dazu da, um überwunden zu werden; und man braucht nur in der Geschichte der Wissenschaften zu blättern, um zu finden, daß schon so manche Begriffe und Ideen, die zuerst rein phantastisch, psychisch oder ästhetisch auftraten, geklärt, fixiert und gemessen worden sind. Und warum sollte dieser Klärungsprozeß nicht immer weiter fortschreiten? Haben wir doch

im Laufe unserer Betrachtung außer den zahlreichen Beispielen aus der Welt der exakten Natur und solchen aus der organischen Welt, also außer Beispielen, die den verschiedenen Naturwissenschaften angehören, auch solche aus den Geisteswissenschaften gebracht, aus der Geschichte und Politik, Volkswirtschaft und Philosophie. Natürlich wird man auf Gebieten, die noch wenig mit dem Scheinwerfer exakter mathematischer und graphischer Methodik beleuchtet worden sind, zunächst nicht gleich Epochemachendes verlangen dürfen, man wird bescheiden anfangen und in den graphischen Bildern vorerst nur Symbole erblicken, die selbst noch der weiteren Untersuchung bedürfen; aber mit der Zeit werden diese Symbole Leben gewinnen, und schließlich wird die exakte Schlußbildung auch hier nicht ausbleiben.

Jedenfalls kommt der graphischen Methode schon jetzt ein ungeheurer Wert bei, und zwar in den verschiedensten Richtungen, von denen wir die wichtigsten hier noch einmal zusammenfassen wollen. Erstens kommt sie dem Anschauungsbedürfnis des Menschen entgegen, und zwar dem aller Menschen, auch derer, in denen es zeitweilig systematisch erstickt worden war. Zweitens dient es der Popularisierung der Wissenschaft, wohlverstanden einer gesunden Popularisierung, da sie den Laien an die exakte Erfassung der Dinge gewöhnt und ihn zu konzentrierter Auffassung zwingt. Drittens führt sie sicherer und darum erfolgreicher zur Feststellung von gesetzlichen Beziehungen, sie fördert also auch die Wissenschaft selbst. Und das tut sie viertens noch ganz besonders dadurch, daß sie die vergleichende Betrachtung verschiedener Erscheinungen fördert und so der Hauptaufgabe aller wissenschaftlicher Tätigkeit dienstbar wird: die Erscheinungen der Natur und des Geistes in der einfachsten und einheitlichsten Weise zu erfassen und dadurch zu einer homogenen und tiefgegründeten Weltanschauung zu gelangen.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Aus Natur und Geisteswelt

Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen aus allen Gebieten des Wissens

Jeder Band ist in sich abgeschlossen und einzeln käuflich. — Werke, die mehrere Bände umfassen, sind auch in einem Band gebunden vorrätig.

Jeder Band geheftet M. 1.—, in Leinwand gebunden M. 1.25

Verzeichnis der bisher erschienenen Bände innerhalb der Wissenschaften alphabetisch geordnet.

Theologie und Philosophie, Pädagogik und Bildungswesen.

Luther im Lichte der neueren Forschung. Ein krit. Bericht. Von Prof. D. H. Boehmer. 3. Aufl. Mit 2 Bildn. (Bd. 113.)

Mädchenschule, Die höhere, in Deutschland. Von Oberlehrerin M. Martin. (Bd. 65.)

Mechanik des Geisteslebens. Von Prof. Dr. M. Verworn. 3. Aufl. Mit 18 Fig. (Bd. 200.)
— siehe auch Psychologie.

Mission, Die evangelische. Von Pastor H. Baudert. (Bd. 406.)

Mittelschule siehe Volks- u. Mittelschule.

Mystik im Heidentum und Christentum. Von Prof. Dr. Edv. Lehmann. (Bd. 217.)

Mythologie, Germanische. Von Prof. Dr. J. von Negelein. 2. Aufl. (Bd. 95.)

Pädagogik, Allgemeine. Von Prof. Dr. Th. Ziegler. 4. Aufl. (Bd. 33.)

Pädagogik, Experimentelle, mit bes. Rücks. auf die Erzieh. durch die Tat. Von Dr. W. A. Lay. 2. Aufl. Mit 2 Abb. (Bd. 224.)
— siehe auch Erziehung, Großstadtpädagogik u. Psychologie des Kindes.

Palästina und seine Geschichte. Von Prof. Dr. H. Frh. v. Soden. 3. Aufl. Mit 2 Karten, 1 Plan u. 6 Ansichten. (Bd. 6.)

Palästina und seine Kultur in fünf Jahrtausenden. Von Dr. P. Thomsen. Mit 36 Abb. (Bd. 260.)

Paulus, Der Apostel, u. sein Werk. Von Prof. Dr. E. Vischer. (Bd. 309.)

Pestalozzi. Leben und Ideen. Von Prof. Dr. P. Natorp. 2. Aufl. Mit Bildn. u. Brieffaks. (Bd. 250.)

Philosophie, Die. Einführung in die Wissenschaft, ihr Wesen und ihre Probleme. Von Realschuldir. H. Richert. 2. Aufl. (Bd. 186.)
— **Einführung in die Philosophie.** Von Prof. Dr. R. Richter. 3. Aufl. von Dr. M. Brahn. (Bd. 155.)
— **Führende Denker.** Geschichtl. Einleitung in die Philosophie. Von Prof. Dr. J. Cohn. 2. Aufl. Mit 6 Bildn. (Bd. 176.)
— siehe auch Weltanschauung.

Philosophie der Gegenwart, Die, in Deutschland. Charakteristik ihrer Hauptrichtungen. Von Prof. Dr. O. Külpe. 6. Aufl. (Bd. 41.)

Psychologie siehe Seele des Menschen.
— siehe auch Mechanik des Geisteslebens.

Psychologie des Kindes. Von Prof. Dr. R. Gaupp. 3. Aufl. Mit 18 Abb. (Bd. 213.)
— siehe auch Pädagogik.

Religion. Die Stellung der R. im Geistesleben. Von Lic. Dr. P. Kalweit. (Bd. 225.)
— **Die Religion der Griechen.** Von Prof. Dr. E. Samter. (Bd. 457.)

Religion. Religion und Naturwissenschaft in Kampf u. Frieden. Ein geschichtl. Rückblick. Von Dr. A. Pfannkuche. 2. Aufl. (Bd. 141.)
— **Die relig. Strömungen der Gegenwart.** Von Superintend. D. A. H. Braasch. 2. Aufl. (Bd. 66.)

Rousseau. Von Prof. Dr. P. Hensel. 2. Aufl. Mit Bildnis. (Bd. 180.)

Schopenhauer. Persönlichkeit, Lehre, Bedeutung. Von Realschuldir. H. Richert. 2. Aufl. Mit Bildn. (Bd. 81.)

Schule siehe Fortbildungsschulwesen, Hilfsschulwesen, Hochschule, Mädchenschule, Mittelschule, Volksschule und die folgenden Bände.

Schulhygiene. Von Prof. Dr. L. Burgerstein. 3. Aufl. Mit 33 Fig. (Bd. 96.)

Schulkämpfe der Gegenwart. Von J. Tews. 2. Aufl. (Bd. 111.)
— siehe auch Erziehung, Moderne, und Großstadtpädagogik.

Schulwesen. Geschichte des deutschen Sch. Von Oberrealschuldir. Dr. K. Knabe. (Bd. 85.)

Seele des Menschen, Die. Von Prof. Dr. J. Rehmke. 4. Aufl. (Bd. 36.)
— siehe auch Psychologie.

Sittliche Lebensanschauungen der Gegenwart. Von weil. Prof. Dr. O. Kirn. 2. Aufl. (Bd. 177.)
— siehe auch Ethik.

Spencer, Herbert. Von Dr. K. Schwarze. Mit Bildnis. (Bd. 245.)

Student, Der Leipziger, von 1409 bis 1909. Von Dr. W. Bruchmüller. Mit 25 Abb. (Bd. 273.)

Technische Hochschulen in Nordamerika. Von Prof. S. Müller. Mit zahlr. Abb., Karte u. Lageplan. (Bd. 190.)

Testament, Neues. Der Text des N. T. nach seiner geschichtl. Entwicklung. Von Div.-Pfarrer A. Pott. Mit 8 Taf. (Bd. 134.)
— siehe auch Jesus.

Theologie. Einführung in die Theologie. Von Pastor M. Cornils. (Bd. 347.)

Über Universitäten und Universitätsstudium. Von Prof. Dr. Th. Ziegler. (Bd. 411.)

Universität, Die amerikanische. Von PH. D. E. D. Perry. Mit 22 Abb. (Bd. 206.)
— siehe auch Student.

Unterrichtswesen, Das deutsche, der Gegenwart. Von Oberrealschuldir. Dr. K. Knabe. (Bd. 299.)

Volksbildungswesen, Das moderne. Bücher- und Lesehallen, Volkshochschulen und verwandte Bildungseinrichtungen in den wichtigsten Kulturländern seit der Mitte des 19. Jahrhunderts. Von Stadtbibliothekar Dr. G. Fritz. Mit 14 Abb. (Bd. 266.)

Volks- und Mittelschule, Die preußische, Entwicklung und Ziele. Von Geh. Reg.- u. Schulrat Dr. Sachse. (Bd. 432.)
Volksschule und Lehrerbildung der Vereinigten Staaten. Von Dir. Dr. F. Kuypers. Mit 48 Abb. u. Titelbild. (Bd. 150.)
Weltanschauung, Griechische. Von Privatdoz. Dr. M. Wundt. (Bd. 329.)
Weltanschauungen, Die, der großen Philosophen der Neuzeit. Von weil. Prof. Dr. L. Busse. 5. Aufl., herausg. von Prof. Dr. R. Falckenberg. (Bd. 56.)
— siehe auch Philosophie.
Willensfreiheit. Das Problem der W. Von Prof. Dr. G. F. Lipps. (Bd. 383.)
— siehe auch Ethik.
Zeichenkunst. Der Weg zur Z. Von Dr. E. Weber. Mit Abb. (Bd. 430.)

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Sprachkunde, Literaturgeschichte und Kunst.

Architektur siehe Baukunst und Renaissancearchitektur.
Ästhetik. Von Prof. Dr. R. Hamann. (Bd. 345.)*)
Bau und Leben der bildenden Kunst. Von Dir. Prof. Dr. Th. Volbehr. 2. Aufl. Mit 44 Abb. (Bd. 68.)*)
Baukunde siehe Abtlg. Technik.
Baukunst. Deutsche B. im Mittelalter. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Matthaei. 3. Aufl. Mit 29 Abb. (Bd. 8.)
— **Deutsche Baukunst seit dem Mittelalter bis z. Ausg. des 18. Jahrh.** Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Matthaei. Mit 62 Abb. und 3 Tafeln. (Bd. 326.)
— **Deutsche Baukunst im 19. Jahrh.** Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Matthaei. Mit 35 Abb. (Bd. 453.)
Beethoven siehe Haydn.
Björnson siehe Ibsen.
Dekorative Kunst des Altertums. Von Dr. Fr. Poulsen. Mit 112 Abb. (Bd. 454.)
Drama, Das. Von Dr. B. Busse. Mit Abb. 2 Bde.
Bd. I: Von der Antike zum französ. Klassizismus. (Bd. 287.)
Bd. II: Von Versailles bis Weimar. (Bd. 288.)
— siehe auch Shakespeare, Lessing, Schiller und Theater.
Drama, Das deutsche, des 19. Jahrh. In s. Entwickl. dargest. von Prof. Dr. G. Witkowski. 4. Aufl. Mit Bildn. Hebbels. (Bd. 51.)
— siehe auch Hebbel, Hauptmann.
Dürer, Albrecht. Von Dr. R. Wustmann. Mit 33 Abb. (Bd. 97.)*)
Französische Roman, Der, und die Novelle. Von O. Flake. (Bd. 377.)
Frauendichtung. Geschichte der deutschen F. seit 1800. V. Dr. H. Spiero. (Bd. 300.)
Griechische Kunst. Die Blütezeit der g. K im Spiegel der Reliefsarkophage. Eine Einführung in die griech. Plastik. Von Dr. H. Wachtler. Mit 8 Taf. u. 32 Abb. (Bd. 272.)*)
— siehe auch Dekorative Kunst.
Harmonium siehe Tasteninstrumente.
Hauptmann, Gerhart. Von Prof. Dr. E. Sulger-Gebing. Mit 1 Bildn. (Bd. 283.)
Haydn, Mozart, Beethoven. Von Prof. Dr. C. Krebs. 2. Aufl. Mit 4 Bildn. (Bd. 92.)
Hebbel, Friedrich. Von Prof. Dr. O. Walzel. Mit 1 Bildn. (Bd. 408.)
Ibsen, Björnson und ihre Zeitgenossen. Von weil. Prof. Dr. B. Kahle. 2. Aufl. von Dr. Morgenstern. Mit 7 Bildn. (Bd. 193.)
Impressionismus. Die Maler des I. Von Prof. Dr. B. Lázár. Mit 32 Abb. u. 1 farb. Tafel. (Bd. 395.)*)
Klavier siehe Tasteninstrumente.
Kunst, Deutsche, im täglichen Leben bis zum Schlusse des 18. Jahrh. Von Prof. Dr. B. Haendcke. Mit 63 Abb. (Bd. 198.)
Kunst siehe auch Dekorative, Griechische, Ostasiatische Kunst.
Kunstpflege in Haus und Heimat. Von Superint. R. Bürkner. 2. Aufl. Mit 29 Abb. (Bd. 77.)
Lessing. V. Dr. Ch. Schrempf. (Bd. 403.)
Lyrik. Geschichte der deutschen L. seit Claudius. Von Dr. H. Spiero. (Bd. 254.)
— siehe auch Minnesang und Volkslied.
Maler, Die altdeutschen, in Süddeutschland. Von H. Nemitz. Mit Bilderanhang. (Bd. 464.) Siehe auch Impressionismus.
Malerei, Die deutsche, im 19. Jahrh. Von Prof. Dr. R. Hamann. 2 Bände Text, 2 Bände Abbildgn., auch in 1 Halbpergamentbd. zu M. 6.—. (Bd. 448—451.)
Malerei, Niederländische, im 17. Jahrh. Von Dr. H. Jantzen. Mit zahlr. Abb.
— siehe auch Rembrandt. (Bd. 373.)*)
Michelangelo. Einführung in das Verständn. s. Werke. Von Prof. Dr. E. Hildebrandt. Mit 44 Abb. (Bd. 392.)*)
Minnesang. Von Dr. J. W. Bruinier. (Bd. 404.)
Mozart siehe Haydn.

*) Auch in Halbpergamentbänden zu M. 2.— vorrätig.

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Kultur, Geschichte und Geographie, Recht und Wirtschaft.

*) **Auch in Halbpergamentbänden zu M. 2.— vorrätig.**

Bauernhaus. Kulturgeschichte des deutschen B. Von Reg.-Baumeister Chr. Ranck. 2. Aufl. Mit 70 Abb. (Bd. 121.)
Bauernstand. Geschichte des deutschen B. Von Prof. Dr. H. Gerdes. Mit 21 Abb. (Bd. 320.)
Bevölkerungslehre. Von Prof. Dr. M. Haushofer. (Bd. 50.)
Buch. Wie ein Buch entsteht. Von Prof. A. W. Unger. 3. Aufl. Mit 7 Taf. u. 26 Abb. (Bd. 175.)
— **Das Buchgewerbe und die Kultur.** 6 Vorträge, gehalten i. A. des Deutschen Buchgewerbevereins. Mit 1 Abb. (Bd. 182.)
— siehe auch Schrift- und Buchwesen.
Byzantinische Charakterköpfe. Von Privatdoz. Dr. K. Dieterich. Mit 2 Bildn. (Bd. 244.)
Charakterbilder aus deutscher Geschichte siehe Von Luther zu Bismarck.
Deutsch: Deutsches Bauernhaus s. Bauernhaus. — Deutscher Bauernstand s. Bauernstand. — Deutsches Dorf s. Dorf. — Deutsche Einheit s. Vom Bund zum Reich. — Deutsches Frauenleben s. Frauenleben. — Deutsche Geschichte s. Geschichte. — Deutscher Handel s. Handel. — Deutsches Haus s. Haus. — Deutsche Kolonien s. Kolonien. — Deutsche Landwirtschaft s. Landwirtschaft. — Deutsche Reichsversicherung s. Reichsversicherung. — Deutsche Schiffahrt s. Schiffahrt. — Deutsches Schulwesen s. Schulwesen. — Deutsche Städte s. Städte. — Deutsche Verfassung, Verfassungsrecht s. Verfassung, Verfassungsrecht. — Deutsche Volksfeste, Volksstämme, Volkstrachten s. Volksfeste usw. — Deutsches Weidwerk s. Weidwerk. — Deutsches Wirtschaftsleben s. Wirtschaftsleben. — Deutsches Zivilprozeßrecht s. Zivilprozeßrecht.
Deutschtum im Ausland, Das. Von Prof. Dr. R. Hoeniger. (Bd. 402.)
Dorf, Das deutsche. Von R. Mielke. 2. Aufl. Mit 51 Abb. (Bd. 192.)
Ehe und Eherecht. Von Prof. Dr. L. Wahrmund. (Bd. 115.)
Eisenbahnwesen, Das. Von Eisenbahnbau- u. Betriebsinsp. a. D. Biedermann. 2. Aufl. Mit Abbildgn. (Bd. 144.)
— siehe auch Verkehrsentwicklung in Deutschland 1800/1900.
Englands Weltmacht in ihrer Entwicklung vom 17. Jahrhundert bis auf unsere Tage. Von Prof. Dr. W. Langenbeck. 2. Aufl. Mit 19 Bildn. (Bd. 174.)
Entdeckungen, Das Zeitalter der. Von Prof. Dr. S. Günther. 3. Aufl. Mit 1 Weltkarte. (Bd. 26.)
Erbrecht. Testamentserrichtung und E. Von Prof. Dr. F. Leonhard. (Bd. 429.)
Familienforschung. Von Dr. E. Devrient. (Bd. 350.)
Finanzwissenschaft. Von Prof. Dr. S. P. Altmann. (Bd. 306.)
Frauenarbeit. Ein Problem des Kapitalismus. Von Prof. Dr. R. Wilbrandt. (Bd. 106.)
Frauenbewegung, Die moderne. Ein geschichtlicher Überblick. Von Dr. K. Schirmacher. 2. Aufl. (Bd. 67.)
Friedensbewegung, Die moderne. Von A. H. Fried. (Bd. 157.)
Friedrich der Große. Sechs Vorträge. Von Prof. Dr. Th. Bitterauf. 2. Aufl. Mit 2 Bildnissen. (Bd. 246.)
Gartenkunst. Geschichte d. G. Von Reg.-Baumeister Chr. Ranck. Mit 41 Abb. (Bd. 274.)
— siehe auch Abt. Naturwissensch. (Blumen u. Pflanzen.)
Gartenstadtbewegung, Die. Von Generalsekr. H. Kampffmeyer. Mit 45 Abb. 2. Aufl. (Bd. 239.)
Geld, Das, und sein Gebrauch. Von G. Maier. (Bd. 398.)
— siehe auch Münze.
Germanische Kultur in der Urzeit. Von Prof. Dr. G. Steinhausen. 2. Aufl. Mit 13 Abb. (Bd. 75.)
Geschichte, Deutsche siehe Von Luther zu Bismarck, Friedrich der Große, Restauration u. Revolution, Von Jena bis zum Wiener Kongreß, Revolution (1848), Reaktion u. neue Ära, Vom Bund zum Reich, Moltke.
Gewerblicher Rechtsschutz in Deutschland. Von Patentanw. B. Tolksdorf. (Bd. 138.)
Griechische Städte. Kulturbilder aus gr. St. Von Oberlehrer Dr. E. Ziebarth. 2. Aufl. Mit 23 Abb. u. 2 Tafeln. (Bd. 131.)
Handel. Geschichte des Welthandels. Von Prof. Dr. M. G. Schmidt. 2. Aufl. (Bd. 118.)
— **Geschichte des deutschen Handels.** Von Prof. Dr. W. Langenbeck. (Bd. 237.)
Handwerk, Das deutsche, in seiner kulturgeschichtlichen Entwicklung. Von Dir. Dr. E. Otto. 4. Aufl. Mit 27 Abb. (Bd. 14.)
Haus, Das deutsche, und sein Hausrat. Von Prof. Dr. R. Meringer. Mit 106 Abb. (Bd. 116.)
Holland siehe Städtebilder, Historische.
Hotelwesen. Von P. Damm-Etienne. Mit 30 Abb. (Bd. 331.)
Japaner, Die, in der Weltwirtschaft. Von Prof. Dr. Rathgen. 2. Aufl. (Bd. 72.)
Jesuiten, Die. Eine histor. Skizze. Von Prof. Dr. H. Boehmer. 3. Aufl. (Bd. 29.)
Internationale Leben, Das, der Gegenwart. Von A. H. Fried. Mit 1 Tafel. (Bd. 226.)
Island, das Land und das Volk. Von Prof. Dr. P. Herrmann. Mit Abb. und Karten. (Bd. 461.)

Jurisprudenz im häuslichen Leben. Für Familie und Haushalt dargestellt. Von Rechtsanw. P. Bienengräber. 2 Bde. (Bd. 219, 220.)
Kaufmann. Das Recht des K. Von Rechtsanwalt Dr. M. Strauß. (Bd. 409.)
Kaufmännische Angestellte. Das Recht der k. A. Von Rechtsanw. Dr. M. Strauß. (Bd. 361.)
Kolonien, Die deutschen. (Land und Leute.) Von Dr. A. Heilborn. 3. Aufl. Mit 26 Abb. u. 2 Karten. (Bd. 98.)
— **Unsere Schutzgebiete nach ihren wirtschaftl. Verhältnissen.** Im Lichte der Erdkunde dargestellt. Von Dr. Chr. G. Barth. (Bd. 290.)
Kolonisation, Innere. Von A. Brenning. (Bd. 261.)
Konsumgenossenschaft, Die. Von Prof. Dr. F. Staudinger. (Bd. 222.)
Krieg, Der, im Zeitalter des Verkehrs und der Technik. Von Hauptmann A. Meyer. Mit 3 Abb. (Bd. 271.)
— **Vom Kriegswesen im 19. Jahrhundert.** Von Major O. v. Sothen. Mit 9 Übersichtskarten. (Bd. 59.)
— siehe auch Seekrieg.
Landwirtschaft, Die deutsche. Von Dr. W. Claaßen. Mit 15 Abb. und 1 Karte. (Bd. 215.)
Miete, Die, nach dem BGB. Ein Handbüchlein für Juristen, Mieter und Vermieter. Von Rechtsanw. Dr. M. Strauß. (Bd. 194.)
Mittelalterliche Kulturideale. Von Prof. Dr. V. Vedel. 2 Bde.
Bd. I: Heldenleben. (Bd. 292.)
Bd. II: Ritterromantik. (Bd. 293.)
Mittelstandsbewegung, Die moderne. Von Dr. L. Müffelmann. (Bd. 417.)
Moltke. Von Kaiserl. Ottoman. Major im Generalstab F. C. Endres. Mit Bildn. (Bd. 415.)
Münze, Die, als historisches Denkmal sowie ihre Bedeutung im Rechts- und Wirtschaftsleben. Von Prof. Dr. A. Luschin v. Ebengreuth. Mit 53 Abb. — siehe auch Geld. [(Bd. 91.)
Napoleon I. Von Prof. Dr. Th. Bitterauf. 2. Aufl. Mit Bildn. (Bd. 195.)
Naturvölker, Die geistige Kultur der N. Von Prof. Dr. K. Th. Preuß. Mit 7 Abb. (Bd. 452.)
Organisationen, Die wirtschaftlichen. Von Privatdoz. Dr. E. Lederer. (Bd. 428.)
Orient, Der. Eine Länderkunde. Von E. Banse. 3 Bde.
Bd. I: **Die Atlasländer. Marokko, Algerien, Tunesien.** Mit 15 Abb., 10 Kartenskizzen, 3 Diagrammen u. 1 Tafel. (Bd. 277.)
Bd. II: **Der arabische Orient.** Mit 29 Abb. und 7 Diagrammen. (Bd. 278.)

Orient, Der.
Bd. III: Der arische Orient. Mit 34 Abb., 3 Kartenskizzen und 2 Diagrammen. (Bd. 279.)
Österreich. Geschichte der auswärtigen Politik Österreichs im 19. Jahrhundert. Von R. Charmatz. (Bd. 374.)
Österreichs innere Geschichte von 1848 bis 1907. Von R. Charmatz. 2 Bände. 2. Aufl.
Bd. I: Die Vorherrschaft der Deutschen. (Bd. 242.)
Bd. II: Der Kampf d. Nationen. (Bd. 243.)
Ostmark, Die. Eine Einführung in die Probleme ihrer Wirtschaftsgeschichte. Von Prof. Dr. W. Mitscherlich. (Bd. 351.)
Ostseegebiet. Von Privatdozent Dr. G. Braun. (Bd. 367.)
Palästina und seine Geschichte. Von Prof. Dr. H. Freiherr von Soden. 3. Aufl. Mit 2 Karten, 1 Plan und 6 Ansichten. (Bd. 6.)
Palästina und seine Kultur in fünf Jahrtausenden. Von Gymnasialoberlehrer Dr. P. Thomsen. Mit 36 Abb. (Bd. 260.)
Polarforschung. Geschichte der Entdeckungsreisen zum Nord- und Südpol von den ältesten Zeiten bis zur Gegenwart. Von Prof. Dr. K. Hassert. 3. Aufl. Mit 6 Karten. (Bd. 38.)
Politische Geographie. Von Dr. E. Schöne. (Bd. 353.)
Politische Hauptströmungen in Europa im 19. Jahrhundert. Von Prof. Dr. K. Th. v. Heigel. 2. Aufl. (Bd. 129.)
Pompeji, eine hellenistische Stadt in Italien. Von Prof. Dr. Fr. v. Duhn. 2. Aufl. Mit 62 Abb. (Bd. 114.)
Postwesen, Das. Entwicklung und Bedeutg. Von Postrat J. Bruns. (Bd. 165.)
Reaktion und neue Ära. Skizzen zur Entwicklungsgeschichte der Gegenwart. Von Prof. Dr. R. Schwemer. 2. Aufl. (Bd. 101.)
Recht siehe Eherecht, Erbrecht, Gewerbl. Rechtsschutz, Jurisprudenz, Kaufmann, Kaufmänn. Angestellte, Urheberrecht, Verbrechen, Verfassungsrecht, Wahlrecht, Zivilprozeßrecht.
Rechtsprobleme, Moderne. Von Prof. Dr. J. Kohler. 3. Aufl. (Bd. 128.)
Reichsversicherung, Die. Die Kranken-, Invaliden-, Hinterbliebenen-, Unfall- und Angestelltenversicherung nach der Reichsversicherungsordnung u. dem Versicherungsgesetz für Angestellte. Von Landesversicherungsassessor H. Seelmann. (Bd. 380.)
Restauration und Revolution. Skizzen zur Entwicklungsgeschichte der deutschen Einheit. Von Prof. Dr. R. Schwemer. 3. Aufl. (Bd. 87.)

Revolution. Geschichte der Französischen R. Von Prof. Dr. Th. Bitterauf. (Bd. 346.)
— **1848.** Sechs Vorträge. Von Prof. Dr. O. Weber. 2. Aufl. (Bd. 53.)
Rom. Das alte Rom. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. O. Richter. Mit Bilderanhang u. 4 Plänen. (Bd. 386.)
— **Soziale Kämpfe im alten Rom.** Von Privatdoz. Dr. L. Bloch. 3. Aufl. (Bd. 22.)
— **Roms Kampf um die Weltherrschaft.** Von Prof. Dr. Kromayer. (Bd. 368.)
Schiffahrt, Deutsche, und Schiffahrtspolitik der Gegenwart. Von Prof. Dr. K. Thieß. (Bd. 169.)
Schrift- und Buchwesen in alter und neuer Zeit. Von Prof. Dr. O. Weise. 3. Aufl. Mit 37 Abb. (Bd. 4.)
— siehe auch Buch.
Schulwesen. Geschichte des deutschen Schulwesens. Von Oberrealschuldir. Dr. K. Knabe. (Bd. 85.)
Seekrieg. Eine geschichtl. Entwicklung vom Zeitalter der Entdeckungen bis zur Gegenwart. Von K. Freiherrn v. Maltzahn, Vizeadmiral a. D. (Bd. 99.)
— **Das Kriegsschiff.** Von Geh. Marinebaurat Krieger. Mit 60 Abb. (Bd. 389.)
— siehe Krieg.
Soziale Bewegungen und Theorien bis zur modernen Arbeiterbewegung. Von G. Maier. 4. Aufl. (Bd. 2.)
— siehe auch Arbeiterschutz und Arbeiterversicherung.
Soziale Kämpfe im alten Rom siehe Rom.
Sozialismus. Geschichte der sozialistischen Ideen im 19. Jahrh. Von Privatdoz. Dr. Fr. Muckle. 2 Bde.
Band I: Der rationale Sozialismus. (Bd. 269.)
Band II: Proudhon und der entwicklungsgeschichtliche Sozialismus. (Bd. 270.)
Städte, Die. Geographisch betrachtet. Von Prof. Dr. K. Hassert. Mit 21 Abb. (Bd. 163.)
— **Deutsche Städte und Bürger im Mittelalter.** Von Prof. Dr. B. Heil. 3. Aufl. Mit zahlr. Abb. u. 1 Doppeltafel. (Bd. 43.)
— **Historische Städtebilder aus Holland und Niederdeutschland.** Von Reg.-Baumeister a. D. A. Erbe. Mit 59 Abb. (Bd. 117.)
— siehe auch Griechische Städte, ferner Pompeji, Rom.
Statistik. Von Prof. Dr. S. Schott. (Bd. 442.)
Strafe und Verbrechen. Von Dr. P. Pollitz. (Bd. 323.)
Student, Der Leipziger, von 1409 bis 1909. Von Dr. W. Bruchmüller. Mit 25 Abb. (Bd. 273.)
Telegraphie, Die, in ihrer Entwicklung und Bedeutung. Von Postrat J. Bruns. Mit 4 Fig. (Bd. 183.)
Testamentserrichtung und Erbrecht. Von Prof. Dr. F. Leonhard. (Bd. 429.)
Theater, Das. Schauspielhaus und Schauspielkunst vom griech. Altertum bis auf die Gegenw. Von Dr. Chr. Gaehde. 2. Aufl. Mit 18 Abb. (Bd. 230.)
Über Universitäten u. Universitätsstudium. V. Prof. Dr. Th. Ziegler. (Bd. 411.)
— siehe auch Student, Der Leipziger.
Urheberrecht. Das Recht an Schrift- und Kunstwerken. Von Rechtsanwalt Dr. R. Mothes. (Bd. 435.)
Verbrechen. Strafe und V. Von Dr. P. Pollitz. (Bd. 323.)
Verbrechen und Aberglaube. Skizzen aus der volkskundlichen Kriminalistik. Von Dr. A. Hellwig. (Bd. 212.)
Verbrecher. Die Psychologie des V. Von Dr. P. Pollitz. Mit 5 Diagrammen. (Bd. 248.)
Verfassung. Grundzüge der V. des Deutschen Reiches. Von Prof. Dr. E. Loening. 4. Aufl. (Bd. 34.)
Verfassungsrecht, Deutsches, in geschichtlicher Entwicklung. Von Prof. Dr. Ed. Hubrich. 2. Aufl. (Bd. 80.)
Verkehrsentwicklung in Deutschland. 1800 bis 1900 (fortgeführt bis zur Gegenwart). Vorträge über Deutschlands Eisenbahnen und Binnenwasserstraßen, ihre Entwicklung und Verwaltung sowie ihre Bedeutung für die heutige Volkswirtschaft. Von Prof. Dr. W. Lotz. 3. Aufl. (Bd. 15.)
— siehe auch Eisenbahnwesen.
Versicherungswesen. Grundzüge des V. Von Prof. Dr. A. Manes. 2. Aufl. (Bd. 105.)
— siehe auch Arbeiterschutz und Arbeiterversicherung und Reichsversicherung.
Volksfeste und Volkssitten, Deutsche. Von H. S. Rehm. Mit 11 Abb. (Bd. 214.)
Volksstämme, Die deutschen, und Landschaften. Von Prof. Dr. O. Weise. 4. Aufl. Mit 29 Abb. (Bd. 16.)
Volkstrachten, Deutsche. Von Pfarrer C. Spieß. (Bd. 342.)
— siehe auch Deutsche Volksfeste usw.
Vom Bund zum Reich. Neue Skizzen zur Entwicklungsgeschichte der deutschen Einheit. Von Prof. Dr. R. Schwemer. 2. Aufl. (Bd. 102.)
Von Jena bis zum Wiener Kongreß. Von Prof. Dr. G. Roloff. (Bd. 465.)
Von Luther zu Bismarck. 12 Charakterbilder aus deutscher Geschichte. Von Prof. Dr. O. Weber. 2 Bde. 2. Aufl. (Bd. 123, 124.)
Wahlrecht, Das. Von Reg.-Rat Dr. O. Poensgen. (Bd. 249.)

Weidwerk, Das deutsche. Von G. Frh. v. Nordenflycht. (Bd. 436.)
Welthandel siehe Handel.
Wirtschaftliche Erdkunde. Von weil. Prof. Dr. Chr. Gruber. 2. Aufl. Bearb. von Prof. Dr. K. Dove. (Bd. 122.)
Wirtschaftsleben, Deutsches. Auf geographischer Grundlage geschildert. Von weil. Prof. Dr. Chr. Gruber. 3. Aufl. Neubearb. v. Dr. H. Reinlein. (Bd. 42.)
— **Die Entwicklung des deutschen Wirtschaftslebens** im letzten Jahrhundert. Von Prof. Dr. L. Pohle. 3. Aufl. (Bd. 57.)
Wirtschaftsleben, Deutsches. Deutschlands Stellung in der Weltwirtschaft. Von Prof. Dr. P. Arndt. 2. Aufl. (Bd. 179.)
Wirtschaftlichen Organisationen, Die. Von Privatdozent Dr. E. Lederer. (Bd. 428.)
Wirtschaftsgeschichte siehe Antike Wirtschaftsgeschichte.
Zeitungswesen. Von Dr. H. Diez. (Bd. 328.)
Zivilprozeßrecht, Das deutsche. Von Rechtsanwalt Dr. M. Strauß. (Bd. 315.)

Wichtige Gebiete der Volkswirtschaft sind auch in der Abteilung Naturwissenschaft und Technik behandelt unter den Stichwörtern: **Automobil, Bierbrauerei, Bilder aus der chem. Technik, Eisenbahnwesen, Eisenhüttenwesen, Elektr. Kraftübertragung, Gartenstadtbewegung, Ingenieurtechnik, Kaffee, Kakao, Kinematographie, Kohlen, Landwirtschaftl. Maschinen, Metalle, Patente, Salz, Schmucksteine, Spinnerei, Straßenbahnen, Tabak, Tee, Wald, Wasserkraftmaschinen, Weinbau.**

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Mathematik, Naturwissenschaften, Medizin und Technik.

Aberglaube, Der, in der Medizin und seine Gefahr für Gesundheit und Leben. Von Prof. Dr. D. v. Hansemann. 2. Aufl. (Bd. 83.)
Abstammungs- und Vererbungslehre, Experimentelle. Von Dr. H. Lehmann. Mit 26 Abb. (Bd. 379.)
Abstammungslehre und Darwinismus. Von Prof. Dr. R. Hesse. 4. Aufl. Mit 37 Fig. (Bd. 39.)
Agrikulturchemie. Von Dr. P. Krische. Mit 21 Abb. (Bd. 314.)
Algebra siehe Arithmetik.
Alkoholismus, Der. Von Dr. G. B. Gruber. Mit 7 Abb. (Bd. 103.)
Ameisen, Die. Von Dr. Fr. Knauer. Mit 61 Fig. (Bd. 94.)
Anatomie des Menschen, Die. Von Prof. Dr. K. v. Bardeleben. 6 Bde. 2. Aufl.
I. Teil: Zellen- und Gewebelehre. Entwicklungsgeschichte der Körper als Ganzes. Mit 70 Abb. (Bd. 418.)
II. Teil: Das Skelett. Mit 53 Abb. (Bd. 419.)
III. Teil: Das Muskel- und Gefäßsystem. Mit 68 Abb. (Bd. 420.)
IV. Teil: Die Eingeweide (Darm-, Atmungs-, Harn- und Geschlechtsorgane). Mit 39 Abb. (Bd. 421.)
V. Teil: Nervensystem und Sinnesorgane. Mit 50 Abb. (Bd. 422.)
VI. Teil: Statik und Mechanik des menschlichen Körpers. Mit 20 Abb. (Bd. 423.)
Aquarium, Das. Von E. W. Schmidt. Mit 15 Fig. (Bd. 335.)
Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. Von Prof. Dr. P. Crantz. 2 Bde.
I. Teil: Die Rechnungsarten. Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Gleichungen zweiten Grades. 2. Aufl. Mit 9 Fig. (Bd. 120.)
II. Teil: Gleichungen. Arithmetische und geometrische Reihen. Zinseszins- und Rentenrechnung. Komplexe Zahlen. Binomischer Lehrsatz. 3. Aufl. Mit 23 Fig. (Bd. 205.)
Arzneimittel und Genußmittel. Von Prof. Dr. O. Schmiedeberg. (Bd. 363.)
Arzt, Der. Seine Stellung und Aufgaben im Kulturleben der Gegenw. Ein Leitfaden der soz. Medizin. Von Dr. med. M. Fürst. (Bd. 265.)
Astronomie. Probleme der modernen Astr. Von Prof. Dr. S. Oppenheim. Mit 11 Fig. (Bd. 355.)
— **Astronomie in ihrer Bedeutung für das praktische Leben.** Von Prof. Dr. A. Marcuse. Mit 26 Abb. (Bd. 378.)
— siehe auch Weltall, Weltbild, Sonne, Mond, Planeten.
Atome. Moleküle — Atome — Weltäther. Von Prof. Dr. G. Mie. 3. Aufl. Mit 27 Fig. (Bd. 58.)
Auge des Menschen, Das, und seine Gesundheitspflege. Von Prof. Dr. G. Abelsdorff. Mit 15 Abb. (Bd. 149.)
Auge, Das, und die Brille. Von Dr. M. v. Rohr. Mit 84 Abb. und 1 Lichtdrucktafel. (Bd. 372.)

Automobil, Das. Eine Einführung in Bau und Betrieb des modernen Kraftwagens. Von Ingenieur K. Blau. 2. Aufl. Mit 86 Abb. u. 1 Titelbild. (Bd. 166.)
Bakterien, Die, im Kreislauf des Stoffes in der Natur und im Haushalt des Menschen. Von Prof. Dr. E. Gutzeit. Mit 13 Abb. (Bd. 233.)
— **Die krankheiterregenden Bakterien.** Von Privatdozent Dr. M. Loehlein. Mit 33 Abb. (Bd. 307.)
Bau und Tätigkeit des menschlichen Körpers. Von Prof. Dr. H. Sachs. 3. Aufl. Mit 37 Abb. (Bd. 32.)
Baukunde. Das Wohnhaus. Von Reg.-Baumeister a. D. G. Langen. 2 Bde. Mit Abb.
Bd. I: Sein technischer Aufbau. (Bd. 444.)
Bd. II: Seine Anlage und Ausgestaltung. (Bd. 445.)
— **Eisenbetonbau, Der.** Von Dipl.-Ing. E. Haimovici. 81 Abb. (Bd. 275.)
Baukunst siehe Abtlg. Kunst.
Befruchtungsvorgang, Der, sein Wesen und seine Bedeutung. Von Dr. E. Teichmann. 2. Aufl. Mit 7 Abb. und 4 Doppeltafeln. (Bd. 70.)
Beleuchtungswesen, Das moderne. Von Dr. H. Lux. Mit 54 Abb. (Bd. 433.)
Bierbrauerei. Von Dr. A. Bau. Mit 47 Abb. (Bd. 333.)
Biochemie. Einführung in die B. Von Prof. Dr. W. Löb. (Bd. 352.)
Biologie, Allgemeine. Von Prof. Dr. H. Miehe. 2. Aufl. Mit 140 Fig. (Bd. 130.)
— **Experimentelle.** Von Dr. C. Thesing. Mit Abb. 2 Bände.
Bd. I: Experim. Zellforschung. (Bd. 336.)
Band II: Regeneration, Transplantation und verwandte Gebiete. (Bd. 337.)
—, siehe auch Abstammungslehre und Befruchtungsvorgang, Erscheinungen des Lebens, Lebewesen, Organismen, Mensch und Tier, Urtiere.
Blumen. Unsere Bl. und Pflanzen im Garten. Von Prof. Dr. U. Dammer. Mit 69 Abb. (Bd. 360.)
— **Unsere Bl. und Pflanzen im Zimmer.** Von Prof. Dr. U. Dammer. Mit 65 Abb. (Bd. 359.)
Blut. Herz, Blutgefäße und Blut und ihre Erkrankungen. Von Prof. Dr. H. Rosin. Mit 18 Abb. (Bd. 312.)
Botanik siehe Kolonialbotanik, Blumen, Kulturpflanzen.
Brauerei. Die Bierbrauerei. Von Dr. A. Bau. Mit 47 Abb. (Bd. 333.)
Brille. Das Auge und die Br. Von Dr. M. v. Rohr. Mit 84 Abb. und 1 Lichtdrucktafel. (Bd. 372.)

Buch. Wie ein Buch entsteht. Von Prof. A. W. Unger. 3. Aufl. Mit 7 Tafeln und 26 Abb. (Bd. 175.)
— siehe auch Abt. Kultur (Buchgewerbe, Schrift- u. Buchwesen).
Chemie. Einführung in die chemische Wissenschaft. Von Prof. Dr. W. Löb. Mit 16 Figuren. (Bd. 264.)
— **Einführung in die organ. Chemie:** Natürl. und künstl. Pflanzen- u. Tierstoffe. Von Dr. B. Bavink. 2. Aufl. Mit 7 Fig. (Bd. 187.)
— **Bilder aus der chemischen Technik.** Von Dr. A. Müller. Mit 24 Abb. (Bd. 191.)
Chemie in Küche und Haus. Von Dr. J. Klein. 3. Aufl. Mit 1 Doppeltafel. (Bd. 76.)
Chemie und Technologie der Sprengstoffe. Von Prof. Dr. R. Biedermann. Mit 15 Fig. (Bd. 286.)
Chirurgie, Die, unserer Zeit. Von Prof. Dr. Feßler. Mit 52 Abb. (Bd. 339.)
Dampfkessel siehe Dampfmaschine I und Feuerungsanlagen.
Dampfmaschine, Die. 2 Bde. I: Wirkungsweise des Dampfes in Kessel und Maschine. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 3. Aufl. Mit 45 Abb. (Bd. 393.)
— II: Ihre Gestaltung und ihre Verwendung. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. Mit 95 Abb. u. 1 Taf. (Bd. 394.)
Darwinismus. Abstammungslehre und D. Von Prof. Dr. R. Hesse. 4. Aufl. Mit 37 Fig. (Bd. 39.)
Differential- u. Integralrechnung. Von Dr. M. Lindow. (Bd. 387.)
Drähte und Kabel, ihre Anfertigung und Anwendung in der Elektrotechnik. Von Telegrapheninspektor H. Brick. Mit 43 Abb. (Bd. 285.)
Eisenbahnwesen, Das. Von Eisenbahnbau- und Betriebsinspektor a. D. E. Biedermann. 2. Aufl. M. zahlr. Abb. (Bd. 144.)
— siehe auch Klein- u. Straßenbahnen Verkehrsentwicklung.
Eisenbetonbau. Von Dipl.-Ing. E. Haimovici. Mit 81 Abb. (Bd. 275.)
Eisenhüttenwesen. Von weil. Geh. Bergrat Prof. Dr. H. Wedding. 4. Aufl. von Bergreferendar F. W. Wedding. Mit 15 Fig. (Bd. 20.)
Eiszeit, Die, und der vorgeschichtliche Mensch. Von Prof. Dr. G. Steinmann. Mit 24 Abb. (Bd. 302.)
Elektrische Kraftübertragung. Von Ing. P. Köhn. Mit Abb. (Bd. 424.)
Elektrochemie. Von Prof. Dr. K. Arndt. Mit 38 Abb. (Bd. 234.)
Elektrotechnik. Grundlagen der E. Von Dr. A. Rotth. Mit 72 Abb. (Bd. 391.)
— siehe auch Drähte und Kabel, Telegraphie.

Krankenpflege. Von Chefarzt Dr. B. Leick. (Bd. 152.)
Kriegsschiff, Das. Von Geh. Marinebaurat Krieger. Mit 60 Abb. (Bd. 389.)
Küche siehe Chemie in Küche und Haus.
Kulturpflanzen. Unsere wichtigsten K. (Die Getreidegräser). Von Prof. Dr. K. Giesenhagen. 2. Aufl. Mit 38 Fig. (Bd. 10.)
Landwirtschaftliche Maschinenkunde. Von Prof. Dr. G. Fischer. Mit 62 Abb. (Bd. 316.)
Lebewesen. Die Beziehungen der Tiere und Pflanzen zueinander. Von Prof. Dr. K. Kraepelin. Mit 132 Abb.
— — I. Der Tiere zueinander. (Bd. 426.)
— — II. Der Pflanzen zueinander und zu den Tieren. (Bd. 427.)
— siehe Organismen, Biologie.
Leibesübungen, Die, und ihre Bedeutung für die Gesundheit. Von Prof. Dr. R. Zander. 3. Aufl. Mit 19 Abb. (Bd. 13.)
Licht, Das, und die Farben. Von Prof. Dr. L. Graetz. 3. Aufl. Mit 117 Abb. (Bd. 17.)
Luft, Wasser, Licht und Wärme. Neun Vorträge aus dem Gebiete der Experimentalchemie. Von Prof. Dr. R. Blochmann. 4. Aufl. Mit 115 Abb. (Bd. 5.)
Luftfahrt, Die, ihre wissenschaftlichen Grundlagen und ihre technische Entwicklung. Von Dr. R. Nimführ. 3. Aufl. von Dr. Fr. Huth. Mit 53 Abb. (Bd. 300.)
Luftstickstoff, Der, und seine Verwertung. Von Prof. Dr. K. Kaiser. Mit 13 Abb. (Bd. 313.)
Lüftung. Heizung und L. Von Ingenieur J. E. Mayer. Mit 40 Abb. (Bd. 241.)
Maschinen siehe Hebezeuge, Dampfmaschine, Wärmekraftmaschine, Wasserkraftmaschine und die folg. Bände.
Maschinenelemente. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. Mit 184 Abb. (Bd. 301.)
Maschinenkunde siehe Landwirtschaftl. Maschinenkunde.
Maße und Messen. Von Dr. W. Block. Mit 34 Abb. (Bd. 385.)
Mathematik, Praktische. Von Dr. R. Neuendorff. I. Teil: Graphisches u. numerisches Rechnen. Mit 62 Fig. u. 1 Tafel. (Bd. 341.)
Mathematik. Naturwissenschaften und M. im klassischen Altertum. Von Prof. Dr. Joh. L. Heiberg. (Bd. 370.)
Mathematische Spiele. Von Dr. W. Ahrens. 2. Aufl. Mit 70 Fig. (Bd. 170.)
Mechanik. Von Kais. Geh. Reg.-Rat A. v. Ihering. 2 Bde.
Bd. I: Die Mechanik der festen Körper. Mit 61 Abb. (Bd. 303.)
Bd. II: Die Mechanik der flüssigen Körper. Mit 34 Abb. (Bd. 304.)
Meer, Das, seine Erforschung und sein Leben. Von Dr. O. Janson. 3. Aufl. Mit 41 Fig. (Bd. 30.)
Mensch. Entwicklungsgeschichte des M. Von Dr. A. Heilborn. Mit 60 Abb. (Bd. 388.)
Mensch der Urzeit, Der. Vier Vorlesungen aus der Entwicklungsgeschichte des Menschengeschlechtes. Von Dr. A. Heilborn. 2. Aufl. Mit zahlr. Abb. (Bd. 62.)
Mensch, Der vorgeschichtliche, siehe Eiszeit.
Mensch und Erde. Skizzen von den Wechselbeziehungen zwischen beiden. Von weil. Prof. Dr. A. Kirchhoff. 3. Aufl. (Bd. 31.)
Mensch und Tier. Der Kampf zwischen Mensch und Tier. Von Prof. Dr. K. Eckstein. 2. Aufl. Mit 51 Fig. (Bd. 18.)
Menschlicher Körper. Bau und Tätigkeit des menschl. K. Von Prof. Dr. H. Sachs. 3. Aufl. Mit 37 Abb. (Bd. 32.)
— siehe auch Anatomie, Blut, Herz, Nervensystem, Sinne, Verbildungen.
Metalle, Die. Von Prof. Dr. K. Scheid. 3. Aufl. Mit 16 Abb. (Bd. 29.)
Mikroskop, Das, seine Optik, Geschichte und Anwendung. Von Dr. Scheffer. 2. Aufl. Mit 99 Abb. (Bd. 35.)
Milch, Die, und ihre Produkte. Von Dr. A. Reitz. Mit 16 Abb. (Bd. 362.)
Moleküle — Atome — Weltäther. Von Prof. Dr. G. Mie. 3. Aufl. Mit 27 Fig. (Bd. 58.)
Mond, Der. Von Prof. Dr. J. Franz. Mit 31 Abb. (Bd. 90.)
Natur und Mensch. Von Direktor Prof. Dr. M. G. Schmidt. Mit 19 Abb. (Bd. 458.)
Naturlehre. Die Grundbegriffe der modernen N. Von Prof. Dr. F. Auerbach. 3. Aufl. Mit 79 Fig. (Bd. 40.)
Naturwissenschaften im Haushalt. Von Dr. J. Bongardt. 2 Bde.
I. Teil: Wie sorgt die Hausfrau für die Gesundheit der Familie? Mit 31 Abb. (Bd. 125.)
II. Teil: Wie sorgt die Hausfrau für gute Nahrung? Mit 17 Abb. (Bd. 126.)
Naturwissenschaften und Mathematik im klassischen Altertum. Von Prof. Dr. Joh. L. Heiberg. (Bd. 370.)
Naturwissenschaft und Religion. N. und R. in Kampf und Frieden. Ein geschichtlicher Rückblick. Von Dr. A. Pfannkuche. 2. Aufl. (Bd. 141.)
Naturwissenschaften und Technik. Am sausenden Webstuhl der Zeit. Übersicht über Wirkungen der Entwicklung der N. und T. auf das gesamte Kulturleben. Von Prof. Dr. W. Launhardt. 3. Aufl. Mit 16 Abb. (Bd. 23.)
Nautik. Von Dir. Dr. J. Möller. Mit 58 Fig. (Bd. 255.)

Nerven. Vom Nervensystem, seinem Bau und seiner Bedeutung für Leib und Seele in gesundem und krankem Zustande. Von Prof. Dr. R. Zander. 2. Aufl. Mit 27 Fig. (Bd. 48.)

Obstbau. Von Dr. E. Voges. Mit 13 Abb. (Bd. 107.)

Optik siehe Auge, Brille, Licht u. Farbe, Mikroskop, Spektroskopie, Stereoskop, Strahlen.

Optischen Instrumente, Die. Von Dr. M. v. Rohr. 2. Aufl. Mit 84 Abb. (Bd. 88.)

Organismen. Die Welt der O. In Entwicklung und Zusammenhang dargestellt. Von Prof. Dr. K. Lampert. Mit 52 Abb. (Bd. 236.)

— siehe Lebewesen.

Patente und Patentrecht siehe Abtlg. Recht. (Gewerbl. Rechtsschutz).

Pflanzen. Das Werden und Vergehen der Pfl. Von Prof. Dr. P. Gisevius. Mit 24 Abb. (Bd. 173.)

— **Vermehrung und Sexualität bei den Pflanzen.** Von Prof. Dr. E. Küster. Mit 38 Abb. (Bd. 112.)

— **Die fleischfressenden Pflanzen.** Von Dr. A. Wagner. Mit 82 Abb. (Bd. 344.)

— **Unsere Blumen und Pflanzen im Garten.** Von Prof. Dr. U. Dammer. Mit 69 Abb. (Bd. 360.)

— **Unsere Blumen und Pflanzen im Zimmer.** Von Prof. Dr. U. Dammer. Mit 65 Abb. (Bd. 359.)

— siehe auch Lebewesen.

Pflanzenwelt des Mikroskops, Die. Von Bürgerschullehrer E. Reukauf. Mit 100 Abb. (Bd. 181.)

Photochemie. Von Prof. Dr. G. Kümmell. Mit 23 Abb. (Bd. 227.)

Photographie, Die, ihre wissenschaftlichen Grundlagen und ihre Anwendung. Von Dr. O. Prelinger. Mit 65 Abb. (Bd. 414.)

Photographie, Die künstlerische. Von Dr. W. Warstat. Mit Bilderanhang (12 Tafeln). (Bd. 410.)

Physik. Werdegang der modernen Ph. Von Dr. H. Keller. Mit 13 Fig. (Bd. 343.)

— **Einleitung in die Experimentalphysik.** Von Prof. Dr. R. Börnstein. Mit 90 Abb. (Bd. 371.)

Physiker. Die großen Ph. und ihre Leistungen. Von Prof. Dr. F. A. Schulze. Mit 7 Abb. (Bd. 324.)

Pilze, Die. Von Dr. A. Eichinger. Mit 54 Abb. (Bd. 334.)

Planeten, Die. Von Prof. Dr. B. Peter. Mit 18 Fig. (Bd. 240.)

Planimetrie zum Selbstunterricht. Von Prof. Dr. P. Crantz. Mit 99 Fig. (Bd. 340.)

Radium und Radioaktivität. Von Dr. M. Centnerszwer. 33 Abb. (Bd. 405.)

Salzlagerstätten, Die deutschen. Von Dr. C. Riemann. (Bd. 407.)

Säugling, Der, seine Ernährung und seine Pflege. Von Dr. W. Kaupe. Mit 17 Abb. (Bd. 154.)

Schachspiel, Das, und seine strategischen Prinzipien. Von Dr. M. Lange. 2. Aufl. Mit den Bildnissen E. Laskers und P. Morphys, 1 Schachbrettafel u. 43 Darst. von Übungsbeispielen. (Bd. 281.)

Schiffbau siehe Kriegsschiff.

Schiffahrt siehe Nautik und Abt. Wirtschaft.

Schmucksteine, Die, und die Schmuckstein-Industrie. Von Dr. A. Eppler. Mit 64 Abb. (Bd. 376.)

Schulhygiene. Von Prof. Dr. L. Burgerstein. 3. Aufl. Mit 43 Fig. (Bd. 96.)

Sinne des Menschen, Die fünf. Von Prof. Dr. J. K. Kreibig. 2. Aufl. Mit 39 Abb. (Bd. 27.)

Spektroskopie. Von Dr. L. Grebe. Mit 62 Abb. (Bd. 284.)

Spinnerei. Von Dir. Prof. M. Lehmann. Mit 35 Abb. (Bd. 338.)

Sprengstoffe. Chemie und Technologie der Spr. Von Prof. Dr. R. Biedermann. Mit 15 Fig. (Bd. 286.)

Stereoskop, Das, und seine Anwendungen. Von Prof. Th. Hartwig. Mit 40 Abb. und 19 Tafeln. (Bd. 135.)

Sonne, Die. Von Dr. A. Krause. Mit 64 Abb. im Text u. auf 1 Buntdrucktafel. (Bd. 357.)

Stimme. Die menschliche St. und ihre Hygiene. Von Prof. Dr. P. H. Gerber. 2. Aufl. Mit 20 Abb. (Bd. 136.)

Strahlen, Sichtbare und unsichtbare. Von Prof. Dr. R. Börnstein und Prof. Dr. W. Marckwald. 2. Aufl. Mit 85 Abb. (Bd. 64.)

Straßenbahnen. Die Klein- und Straßenbahnen. Von Oberingenieur a. D. A. Liebmann. Mit 85 Abb. (Bd. 322.)

Suggestion. Hypnotismus und Suggestion. V. Dr. E. Trömner. 2. Aufl. (Bd. 199.)

Süßwasser-Plankton, Das. Von Prof. Dr. O. Zacharias. 2. Aufl. Mit 49 Abb. (Bd. 156.)

Tabak, Der, in Landwirtschaft, Handel und Industrie. Mit Abb. Von Jac. Wolf. (Bd. 416.)

Tee. Kaffee, Tee, Kakao und die übrigen narkotischen Getränke. Von Prof. Dr. A. Winter. Mit 24 Abb. und 1 Karte. (Bd. 132.)

Telegraphen- und Fernsprechtechnik in ihrer Entwicklung. Von Telegrapheninspektor H. Brick. Mit 58 Abb. (Bd. 235.)

Telegraphen- u. Fernsprechtechnik in ihrer Entwicklung. Die Funkentelegraphie. Von Oberpostpraktikant H. Thurn. Mit 53 Illustrat. 2. Aufl. (Bd. 167.)
— siehe auch Drähte und Kabel.
Tiere der Vorwelt. Von Prof. Dr. O. Abel. Mit 31 Abb. (Bd. 399.)
Tierkunde. Eine Einführung in die Zoologie. Von weil. Privatdozent Dr. K. Hennings. Mit 34 Abb. (Bd. 142.)
— **Lebensbedingungen und Verbreitung der Tiere.** Von Prof. Dr. O. Maas. Mit 11 Karten und Abb. (Bd. 139.)
— **Zwiegestalt der Geschlechter in der Tierwelt (Dimorphismus).** Von Dr. Fr. Knauer. Mit 37 Fig. (Bd. 148.)
— siehe auch Lebewesen.
Tierzüchtung. Von Dr. G. Wilsdorf. Mit 30 Abb. auf 12 Tafeln. (Bd. 369.)
— **Die Fortpflanzung der Tiere.** Von Prof. Dr. R. Goldschmidt. Mit 77 Abb. (Bd. 253.)
Trigonometrie, Ebene, zum Selbstunterricht. Von Prof. Dr. P. Crantz. Mit 50 Fig. (Bd. 431.)
Tuberkulose, Die, ihr Wesen, ihre Verbreitung, Ursache, Verhütung und Heilung. Von Generalarzt Prof. Dr. W. Schumburg. 2. Aufl. Mit 1 Tafel u. 8 Fig. (Bd. 47.)
Uhr, Die. Von Reg.-Bauführer a. D. H. Bock. Mit 47 Abb. (Bd. 216.)
Urtiere, Die. Einführung in die Biologie. Von Prof. Dr. R. Goldschmidt. 2. Aufl. Mit 43 Abb. (Bd. 160.)
Verbildungen, Körperliche, im Kindesalter und ihre Verhütung. Von Dr. M. David. Mit 26 Abb. (Bd. 321.)
Vererbung. Experimentelle Abstammungs- und Vererbungslehre. Von Dr. H. Lehmann. Mit 26 Abb. (Bd. 379.)
Vogelleben, Deutsches. Von Prof. Dr. A. Voigt. (Bd. 221.)
Vogelzug und Vogelschutz. Von Dr. W. R. Eckardt. Mit 6 Abb. (Bd. 218.)
Volksnahrungsmittel siehe Ernährung u. V.
Wald, Der deutsche. Von Prof. Dr. H. Hausrath. 2. Aufl. Mit 15 Abb. und 2 Karten. (Bd. 153.)
Wärme. Die Lehre von der W. Von Prof. Dr. R. Börnstein. Mit 33 Abb. (Bd. 172.)
— siehe auch Luft, Wasser, Licht, Wärme.
Wärmekraftmaschinen, Die neueren. 2 Bde. I: Einführung in die Theorie und den Bau der Maschinen für gasförmige und flüssige Brennstoffe. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 4. Aufl. Mit 42 Abb. (Bd. 21.)
— II: Gasmaschinen, Gas- und Dampfturbinen. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 3. Aufl. Mit 48 Abb. (Bd. 86.)
— siehe auch Kraftanlagen.
Wasser, Das. Von Privatdozent Dr. O. Anselmino. Mit 44 Abb. (Bd. 291.)
— siehe auch Luft, Wasser, Licht, Wärme.
Wasserkraftmaschinen und die Ausnützung der Wasserkräfte. Von Geh. Reg.-Rat A. v. Ihering. 2. Aufl. Mit 73 Fig. (Bd. 228.)
Weinbau und Weinbereitung. Von Dr. F. Schmitthenner. 34 Abb. (Bd. 332.)
Weltall. Der Bau des W. Von Prof. Dr. J. Scheiner. 4. Aufl. Mit 26 Fig. (Bd. 24.)
Weltäther siehe Moleküle.
Weltbild. Das astronomische W. im Wandel der Zeit. Von Prof. Dr. S. Oppenheim. 2. Aufl. Mit 24 Abb. (Bd. 110.)
Weltentstehung. Entstehung der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft. Von Prof. Dr. B. Weinstein. 2. Aufl. (Bd. 223.)
Wetter, Gut und schlecht. Von Dr. R. Hennig. Mit 46 Abb. (Bd. 349.)
Wind und Wetter. Von Prof. Dr. L. Weber. 2. Aufl. Mit 28 Figuren und 3 Tafeln. (Bd. 55.)
Wirbeltiere. Vergleichende Anatomie der Sinnesorgane der W. Von Prof. Dr. W. Lubosch. Mit 107 Abb. (Bd. 282.)
Wohnhaus siehe Baukunde.
Zahnheilkunde siehe Gebiß.

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

DIE KULTUR DER GEGENWART

IHRE ENTWICKLUNG UND IHRE ZIELE

HERAUSGEGEBEN VON PROF. PAUL HINNEBERG

Eine systematisch aufgebaute, geschichtlich begründete Gesamtdarstellung unserer heutigen Kultur, welche die Fundamentalergebnisse der einzelnen Kulturgebiete nach ihrer Bedeutung für die gesamte Kultur der Gegenwart und für deren Weiterentwicklung in großen Zügen zur Darstellung bringt. Das Werk vereinigt eine Zahl erster Namen aus Wissenschaft und Praxis und bietet Darstellungen der einzelnen Gebiete jeweils aus der Feder des dazu Berufensten in gemeinverständlicher, künstlerisch gewählter Sprache auf knappstem Raume. Jeder Band ist inhaltlich vollständig in sich abgeschlossen und einzeln erhältlich.

***) Jeder Band kostet in Leinw. geb. M. 2.—, in Halbfr. geb. M. 4.— mehr.**

TEIL I u. II: Die geisteswissenschaftlichen Kulturgebiete.

Die allgemeinen Grundlagen der Kultur der Gegenwart.

Geh.*) M. 18.—. [2. Aufl. 1912. Teil I, Abt. 1.]

Inhalt: Das Wesen der Kultur: W. Lexis. — Das moderne Bildungswesen: Fr. Paulsen †. — Die wichtigsten Bildungsmittel. A. Schulen und Hochschulen. Das Volksschulwesen: G. Schöppa. Das höhere Knabenschulwesen: A. Matthias. Das höhere Mädchenschulwesen: H. Gaudig. Das Fach- und Fortbildungsschulwesen: G. Kerschensteiner Die geisteswissenschaftliche Hochschulausbildung: Fr. Paulsen †. Die mathematische, naturwissenschaftliche Hochschulausbildung: W. v. Dyck. B. Museen. Kunst- und Kunstgewerbemuseen: L. Pallat. Naturwissenschaftliche Museen: K. Kraepelin. Technische Museen: W. v. Dyck. C. Ausstellungen. Kunst- u. Kunstgewerbeausstellungen: J. Lessing †. Naturwissenschaftl.-techn. Ausstellungen: O. N. Witt. D. Die Musik: G. Göhler. E. Das Theater: P. Schlenther. F. Das Zeitungswesen: K. Bücher. G. Das Buch: R. Pietschmann. H. Die Bibliotheken: F. Milkau. — Organisation der Wissenschaft: H. Diels

Die Religionen des Orients und die altgermanische Religion.

Geh.*) M. 8.—. [2. Aufl. 1913. Teil I, Abt. III, 1.]

Inhalt: Die Anfänge der Religion und die Religion der primitiven Völker: Edv. Lehmann. — Die ägyptische Religion: A. Erman. — Die asiatischen Religionen: Die babylonisch-assyrische Religion: C. Bezold. — Die indische Religion: H. Oldenberg. — Die iranische Religion: H. Oldenberg. — Die Religion des Islams: J. Goldziher. — Der Lamaismus: A. Grünwedel. — Die Religionen der Chinesen: J. J. M. de Groot. — Die Religionen der Japaner: a) Der Shintoismus: K. Florenz, b) Der Buddhismus: H. Haas. — Die orientalischen Religionen in ihrem Einfluß auf den Westen im Altertum: Fr. Cumont. — Altgermanische Religion: A. Heusler.

Geschichte der christl. Religion. M. 18.—*). [2. A. 1909. T. I, IV, 1.]

Inhalt: Die israelitisch-jüdische Religion: J. Wellhausen. — Die Religion Jesu und die Anfänge des Christentums bis zum Nicaenum (325): A. Jülicher. — Kirche und Staat bis zur Gründung der Staatskirche: A. Harnack. — Griechisch-orthodoxes Christentum und Kirche in Mittelalter und Neuzeit: N. Bonwetsch. — Christentum und Kirche Westeuropas im Mittelalter: K. Müller. — Katholisches Christentum und Kirche in der Neuzeit: A. Ehrhard. — Protestantisches Christentum und Kirche in der Neuzeit: E. Troeltsch.

Systemat. christl. Religion. M. 6.60*). [2. A. 1909. Teil I, IV, 2.]

Inhalt: Wesen der Religion u. der Religionswissenschaft: E. Troeltsch. — Christlich-katholische Dogmatik: J. Pohle. — Christlich-katholische Ethik: J. Mausbach. — Christlich-katholische praktische Theologie: C. Krieg. — Christlich-protestantische Dogmatik: W. Herrmann. — Christlich-protestantische Ethik: R. Seeberg. — Christlich-protestantische praktische Theologie: W. Faber. — Die Zukunftsaufgaben der Religion und der Religionswissenschaft: H. J. Holtzmann.

Allgemeine Geschichte der Philosophie. Geh.*) M. 14.—. [2. Auflage 1913. Teil I, Abt. V.]

Inhalt. Einleitung. Die Anfänge der Philosophie und die Philosophie der primitiven Völker: W. Wundt. I. Die indische Philosophie: H. Oldenberg. II. Die islamische und jüdische Philosophie: J. Goldziher. III. Die chinesische Philosophie: W. Grube. IV. Die japanische Philosophie: T. Jnouye. V. Die europäische Philosophie des Altertums: H. v. Arnim. VI. Die patristische Philosophie: Cl. Bäumker. VII. Die europäische Philosophie des Mittelalters: Cl. Bäumker. VIII. Die neuere Philosophie: W. Windelband.



Systemat. Philosophie. Geh.*) M. 10.—. [2. Aufl. 1908. T. I, VI.]

Inhalt. Allgemeines. Das Wesen der Philosophie: W. Dilthey. — Die einzelnen Teilgebiete. I. Logik und Erkenntnistheorie: A. Riehl. II. Metaphysik: W. Wundt. III. Naturphilosophie: W. Ostwald. IV. Psychologie: H. Ebbinghaus. V. Philosophie der Geschichte: R. Eucken. VI. Ethik: Fr. Paulsen. VII. Pädagogik: W. Münch. VIII. Ästhetik: Th. Lipps. — Die Zukunftsaufgaben der Philosophie: Fr. Paulsen.

Die oriental. Literaturen. Geh.*) M. 10.—. [1906. Teil I, Abt. VII.]

Inhalt. Die Anfänge der Literatur und die Literatur der primitiven Völker: E. Schmidt. — Die ägyptische Literatur: A. Erman. — Die babylonisch-assyrische Literatur: C. Bezold. — Die israelitische Literatur: H. Gunkel. — Die aramäische Literatur: Th. Nöldeke. — Die äthiop. Literatur: Th. Nöldeke. — Die arab. Literatur: M. J. de Goeje. — Die ind. Literatur: R. Pischel. — Die altpers. Literatur: K. Geldner. — Die mittelpers. Literatur: P. Horn. — Die neupers. Literatur: P. Horn. — Die türkische Literatur: P. Horn. — Die armenische Literatur: F. N. Finck. — Die georg. Literatur: F. N. Finck. — Die chines. Literatur: W. Grube. — Die japan. Literatur: K. Florenz.

Die griechische und lateinische Literatur und Sprache. Geh.*) M. 12.—. [3. Auflage. 1912. Teil I, Abt. VIII.]

Inhalt: I. Die griechische Literatur und Sprache: Die griech. Literatur des Altertums: U. v. Wilamowitz-Moellendorff. — Die griech. Literatur des Mittelalters: K. Krumbacher. — Die griech. Sprache: J. Wackernagel. — II. Die lateinische Literatur und Sprache: Die römische Literatur des Altertums: Fr. Leo. — Die latein. Literatur im Übergang vom Altertum zum Mittelalter: E. Norden. — Die latein. Sprache: F. Skutsch.

Die osteuropäischen Literaturen u. die slawischen Sprachen. Geh.*) M. 10.—. [1908. Teil I, Abt. IX.]

Inhalt: Die slawischen Sprachen: V. v. Jagić. — Die slawischen Literaturen. I. Die russische Literatur: A. Wesselovsky. — II. Die poln. Literatur: A. Brückner. III. Die böhm. Literatur: J. Máchal. IV. Die südslaw. Literaturen: M. Murko. — Die neugriech. Literatur: A. Thumb. — Die finnisch-ugr. Literaturen. I. Die ungar. Literatur: F. Riedl. II. Die finn. Literatur: E. Setälä. III. Die estn. Literatur: G. Suits. — Die litauisch-lett. Literaturen. I. Die lit. Literatur: A. Bezzenberger. II. Die lett. Literatur: E. Wolter.

Die romanischen Literaturen und Sprachen. Mit Einschluß des Keltischen. Geh.*) M. 12.—. [1908. Teil I, Abt. II, 1.]

Inhalt: I. Die kelt. Literaturen. 1. Sprache u. Literatur im allgemeinen: H. Zimmer. 2. Die einzelnen kelt. Literaturen. a) Die ir.-gäl. Literatur: K. Meyer. b) Die schott.-gäl. u. die Manx-Literatur. c) Die kymr. (walis.) Literatur. d) Die korn. u. die breton. Literatur: L. Ch. Stern. II. Die roman. Literaturen: H. Morf. III. Die roman. Sprachen: W. Meyer-Lübke.

Allgemeine Verfassungs- und Verwaltungsgeschichte. I. Hälfte. Geh.*) M. 10.—. [1911. Teil II, Abt. II, 1.]

Inhalt: Einleitung. Die Anfänge der Verfassung und der Verwaltung und die Verfassung und Verwaltung der primitiven Völker: A. Vierkandt. A. Die orientalische Verfassung und Verwaltung: 1. des orientalischen Altertums: L. Wenger, 2. des Islams: M. Hartmann, 3. Chinas: O. Franke, 4. Japans: K. Rathgen. — B. Die europäische Verfassung und Verwaltung (1. Hälfte): 1. des europäischen Altertums: L. Wenger, 2. der Germanen und des Deutschen Reiches bis zum Jahre 1806: A. Luschin v. Ebengreuth.

Staat u. Gesellschaft d. Griechen u. Römer. M. 8.-*). [1910. II, IV, 1.]

Inhalt: I. Staat und Gesellschaft der Griechen: U. v. Wilamowitz-Moellendorff. — II. Staat und Gesellschaft der Römer: B. Niese.

Staat u. Gesellschaft d. neueren Zeit. M. 9.—*). [1908. Teil II, V, 1.]

Inhalt: I. Reformationszeitalter. a) Staatensystem und Machtverschiebungen. b) Der moderne Staat und die Reformation. c) Die gesellschaftlichen Wandlungen und die neue Geisteskultur: F. v. Bezold. — II. Zeitalter der Gegenreformation: E. Gothein. — III. Zur Höhezeit des Absolutismus. a) Tendenzen, Erfolge und Niederlagen des Absolutismus. b) Zustände der Gesellschaft. c) Abwandlungen des europäischen Staatensystems: R. Koser.

Allgem. Rechtsgeschichte. [1914. Teil II, Abt. VII, 1. Unt. d. Presse.]

Inhalt: Altertum: Die Anfänge des Rechts: J. Kohler — Orientalisches Recht im Altertum: L. Wenger. — Europäisches Recht im Altertum: L. Wenger.

Systematische Rechtswissenschaft. Geh.*) M. 14.—. [2. Auflage 1913. Teil II, Abt. VIII.]

Inhalt: I. Wesen des Rechtes und der Rechtswissenschaft: R. Stammler. II. Die Teilgebiete: A. Privatrecht. Bürgerliches Recht: R. Sohm. Handels- und Wechselrecht: K. Gareis. Internat. Privatrecht: L. v. Bar. B. Zivilprozeßrecht: L. v. Seuffert. C. Strafrecht u. Strafprozeßrecht: F. v. Liszt. D. Kirchenrecht: W. Kahl. E. Staatsrecht: P. Laband. F. Verwaltungsrecht. Justiz u. Verwaltung: G. Anschütz. Polizei- u. Kulturpflege: E. Bernatzik. G. Völkerrecht: F. v. Martitz. III. Zukunftsaufgaben: R. Stammler.

Allgemeine Volkswirtschaftslehre. Von W. Lexis. Geh.*) M. 7.—, [2. Auflage. 1913. Teil II, Abt. X, 1.]

TEIL III: Mathematik, Naturwissenschaft und Medizin.

Die mathematischen Wissenschaften. Bandred.: F. Klein. [Abt. I.]
Erschienen ist: Lfrg. I: Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter: H. G. Zeuthen. Geh. M. 3.—. — Lfrg. II: Die Beziehungen der Mathematik zur Kultur der Gegenwart: A. Voß: Die Verbreitung mathematischen Wissens und mathematischer Auffassung: H. E. Timerding.

Chemie einschl. Kristallographie u. Mineralogie. Bandredakt.: E. v. Meyer u. F. Rinne. Geh.*) M. 18.—. [1913. Abt. III., 2.]

Inhalt: Entwickelung der Chemie von Robert Boyle bis Lavoisier [1660—1793]: E. v Meyer. — Die Entwicklung der Chemie im 19. Jahrhundert durch Begründung und Aus bau der Atomtheorie: E. v. Meyer. — Anorganische Chemie: C. Engler und L. Wöhler — Organische Chemie: O. Wallach. — Physikalische Chemie: R. Luther und W. Nernst. — Photochemie: R. Luther. — Elektrochemie: M. Le Blanc. — Beziehungen der Chemie zur Physiologie: A. Kossel. — Beziehungen der Chemie zum Ackerbau: †O. Kellner und R. Immendorf. — Wechselwirkungen zwischen der chemischen Technik: O. Witt. — Kristallographie und Mineralogie: Fr. Rinne.

Zellen- u. Gewebelehre, Morphologie u. Entwicklungsgesch. 1. Botan. Tl. M. 10.-.*) 2. Zoolog. Tl. M. 16.-.*) [1913. Abt. IV., Bd. 2, I u. II.]

Inhalt des botanischen Teils (Bandred. E. Strasburger): Pflanzl. Zellen- und Gewebelehre: E. Strasburger. — Morphologie und Entwicklungsgeschichte der Pflanzen: W. Benecke.
Inhalt des zoologischen Teils (Bandred. O. Hertwig): Die einzelligen Organismen: R. Hertwig. — Zellen und Gewebe des Tierkörpers: H. Poll. — Allgemeine und experimentelle Morphologie und Entwicklungslehre der Tiere: O. Hertwig. — Entwicklungsgeschichte und Morphologie der Wirbellosen: K. Heider. — Entwicklungsgeschichte der Wirbeltiere: F. Keibel. — Morphologie der Wirbeltiere: E. Gaupp.

Abstammungslehre, Systematik, Paläontologie, Biogeographie. Bdred.: R. Hertwig u. R. v. Wettstein. M. 20.–.*) [1913. Abt. IV, Bd. 4.]

Inhalt: Die Abstammungslehre: R. Hertwig. — Prinzipien der Systematik mit besonderer Berücksichtigung des Systems der Tiere: L. Plate. — Das System der Pflanzen: R. v. Wettstein. — Biographie: A. Brauer. — Pflanzengeographie: A. Engler. — Tiergeographie: A. Brauer. — Paläontologie und Paläozoologie: O. Abel. — Paläobotanik: W. J. Jongmans. — Phylogenie der Pflanzen: R. v. Wettstein. — Phylogenie der Wirbellosen: K. Heider. — Phylogenie der Wirbeltiere: J. E. V. Boas.

TEIL IV: Die technischen Kulturgebiete.

Technik des Kriegswesens. Geh.*) M. 24.—. [1913. Bd. 12.]

Inhalt (Bandredakt. M. Schwarte): Kriegsvorbereitung, Kriegsführung: M. Schwarte. — Waffentechnik, a) in ihren Beziehungen zur Chemie: O. Poppenberg; b) in ihren Beziehungen z. Metallurgie: W. Schwinning; c) in ihren Bezieh. z. Konstruktionslehre: W. Schwinning: — d) in ihren Beziehungen zur optischen Technik: O. von Eberhard; e) in ihren Beziehungen zur Physik und Mathematik: O. Becker. — Technik des Befestigungswesens: J. Schröter. — Kriegsschiffbau: O. Kretschmer. — Vorbereitung für den Seekrieg u. Seekriegsführung: M. Glatzel. — Einfluß d. Kriegswesens auf die Gesamtkultur: A. Kersting.

Künstlerischer Wandschmuck für das deutsche Haus

B.G.Teubners farbige Künstler-Steinzeichnungen

(Original-Lithographien) entsprechen allein vollwertig Original-Gemälden. Keine Reproduktion kann ihnen gleichkommen an künstlerischem Wert. Sie bilden den schönsten Zimmerschmuck und behaupten sich in vornehm ausgestatteten Räumen ebensogut, wie sie das einfachste Wohnzimmer schmücken.



Nr. 255. C. Dotzler: Nürnberg: Blick vom Dürerhaus. 41×30 cm. M. 2.50.

Verkl. farbige Wiedergabe der Orig.-Lithographie.

„Von den Bilderunternehmungen der letzten Jahre, die der neuen ‚ästhetischen Bewegung‘ entsprungen sind, begrüßen wir eins mit ganz ungetrübter Freude: den ‚künstlerischen Wandschmuck für Schule und Haus‘, den die Firma B. G. Teubner in Leipzig herausgibt. Wir haben hier wirklich einmal ein aus warmer Liebe zur g..ten Sache mit rechtem Verständnis in ehrlichem Bemühen geschaffenes Unternehmen vor uns. Fördern wir es, ihm und uns zu Nutz, nach Kräften!“ **(Kunstwart.)**

Vollständiger Katalog der Künstler-Steinzeichnungen mit farbiger Wiedergabe von ca. 200 Blättern gegen Einsend. von 40 Pf. (Ausland 50 Pf.) vom Verlag B. G. Teubner, Leipzig, Poststr. 3


UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 112481889